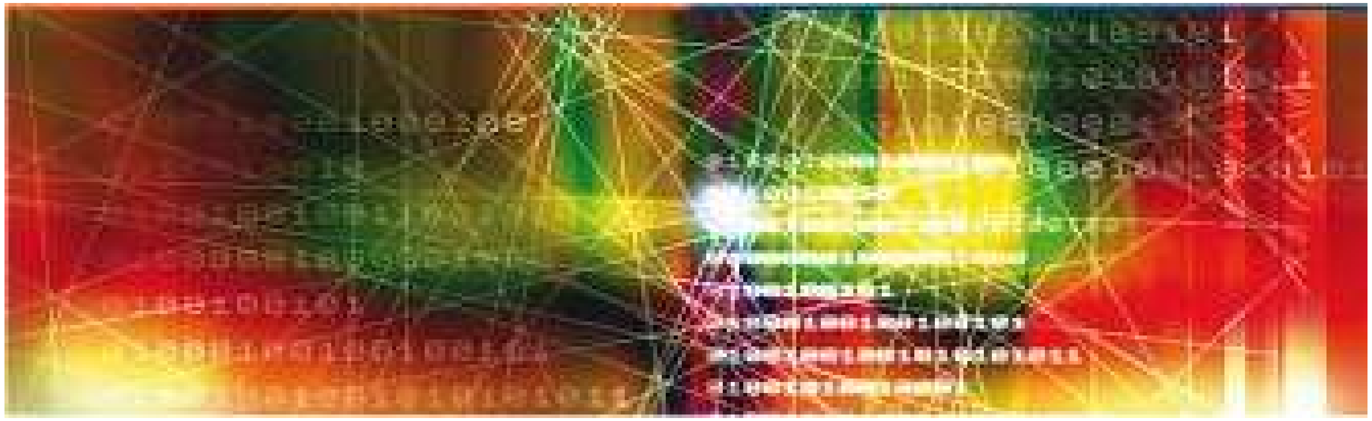
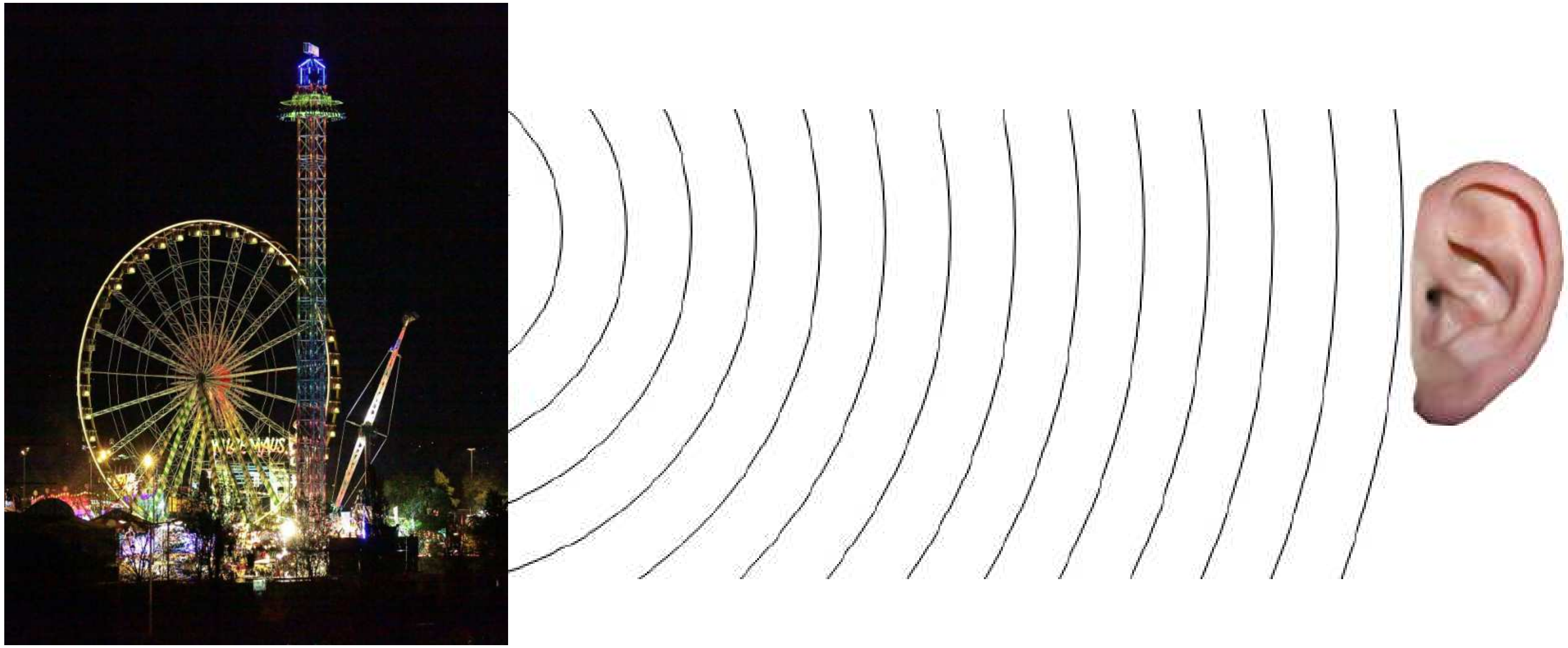
Elementare Funktionen nutzen beim Modellieren





Streckenlängen
mit Google-Earth:

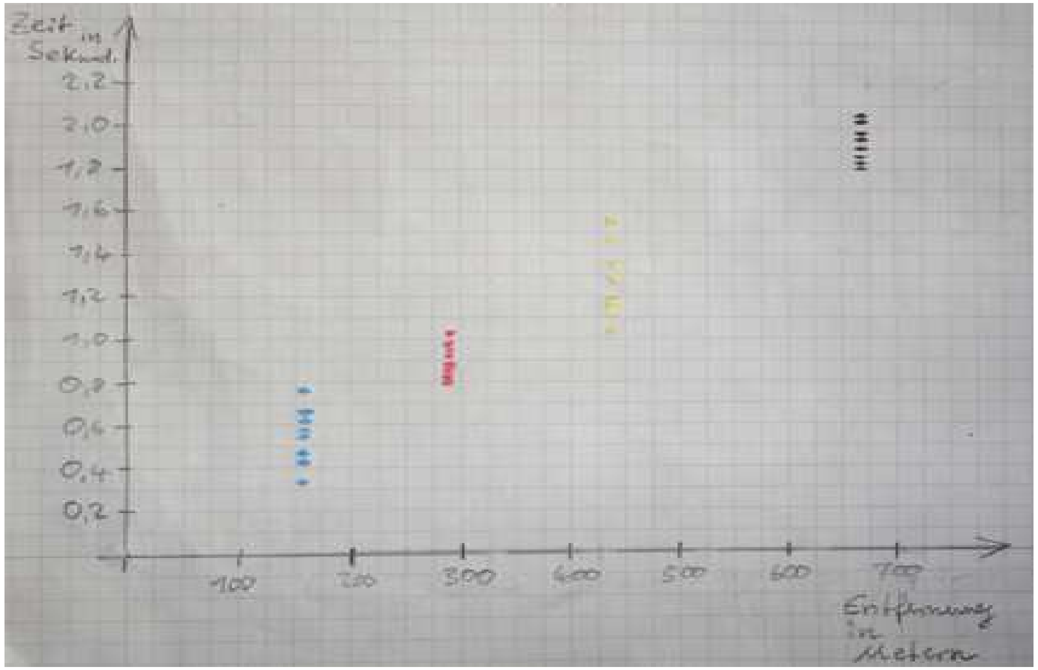
Blau: 165 m

Rot: 295 m

Gelb: 440 m

Grau: 670 m

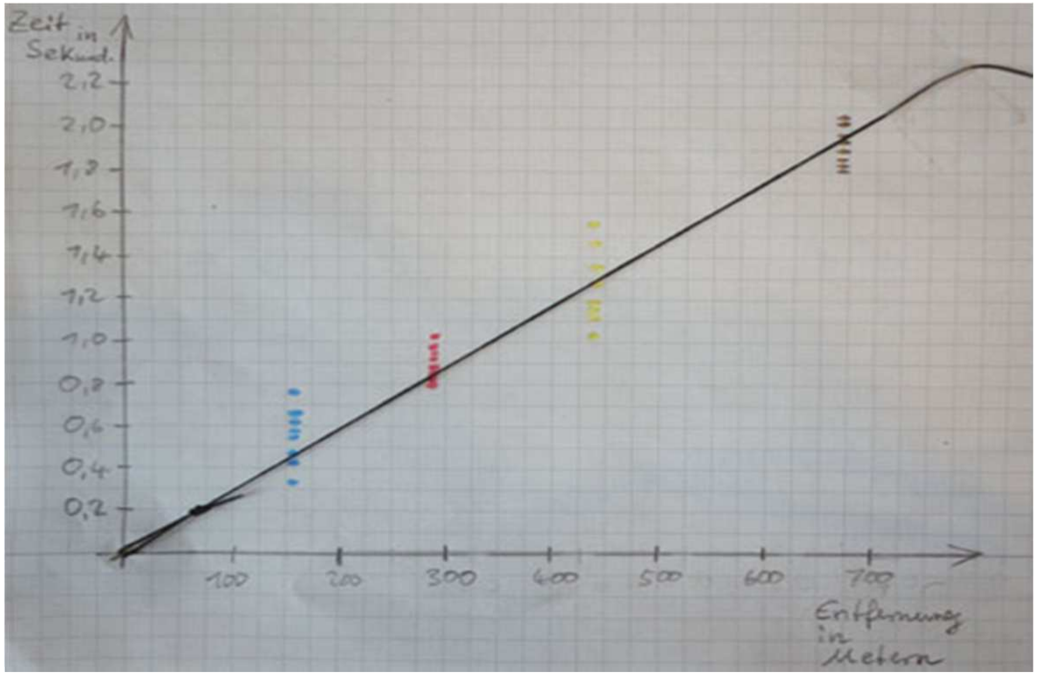
Wann erreicht der Schall der Starterklappe unseren Standort?				
Entfernung	Gruppe 1 165 m	Gruppe 2 295 m	Gruppe 3 440 m	Gruppe 4 670 m
Zeiten [sec]	0,66	0,99	1,35	2,03
	0,68	0,91	1,57	1,96
	0,54	1,01	1,29	1,84
	0,56	0,80	1,46	1,97
	0,46	0,86	1,09	1,90
	0,47	0,85	1,13	2,04
	0,62	0,97	1,03	1,86
	0,32	0,88	1,25	1,82



„Das geht irgendwie so gerade nach oben.“

Wie?

Wann erreicht der Schall der Starterklappe unseren Standort?				
Entfernung	Gruppe 1 165 m	Gruppe 2 295 m	Gruppe 3 440 m	Gruppe 4 670 m
Zeiten [sec]	0,66	0,99	1,35	2,03
	0,68	0,91	1,57	1,96
	0,54	1,01	1,29	1,84
	0,56	0,80	1,46	1,97
	0,46	0,86	1,09	1,90
	0,47	0,85	1,13	2,04
	0,62	0,97	1,03	1,86
	0,32	0,88	1,25	1,82



Einpassung einer linearen Funktion?

Interpretation dieser speziellen linearen Funktion mit ihren Parametern?

Ein Thema für Schule und Hochschule:

Funktion	1000 m ≈ 3 s
	doppelte Entfernung ≈ doppelte Zeit
	dreifache Entfernung ≈ dreifache Zeit
	halbe Entfernung ≈ halbe Zeit

und auch:

Modellieren	Übergang zwischen Welt und Modell
	Mathematisieren – Interpretieren
Daten und Zufall	Längen, Zeiten und deren Zuordnung, Darstellung von Daten, Variabilität der Messwerte

Gliederung

Funktionen …

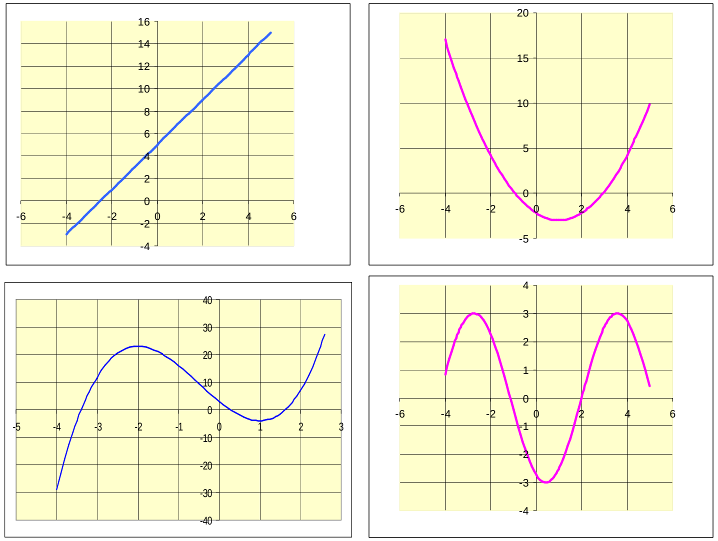
Funktion: Was ist das?

– Lineare Funktion, y=2x+5

– Quadratische Funktion $y=3x^2-8x+2$

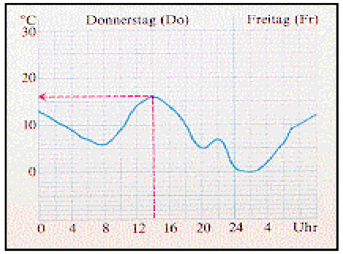
– Kubische Funktion $y=2x^3+3x^2-12x+3$

– trigonometrische Funktionen y=sin(3x-2)

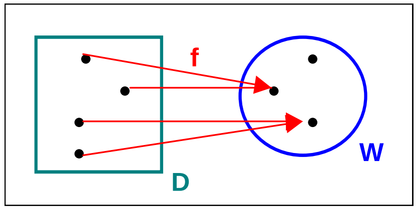


– …

– Zeitfunktionen



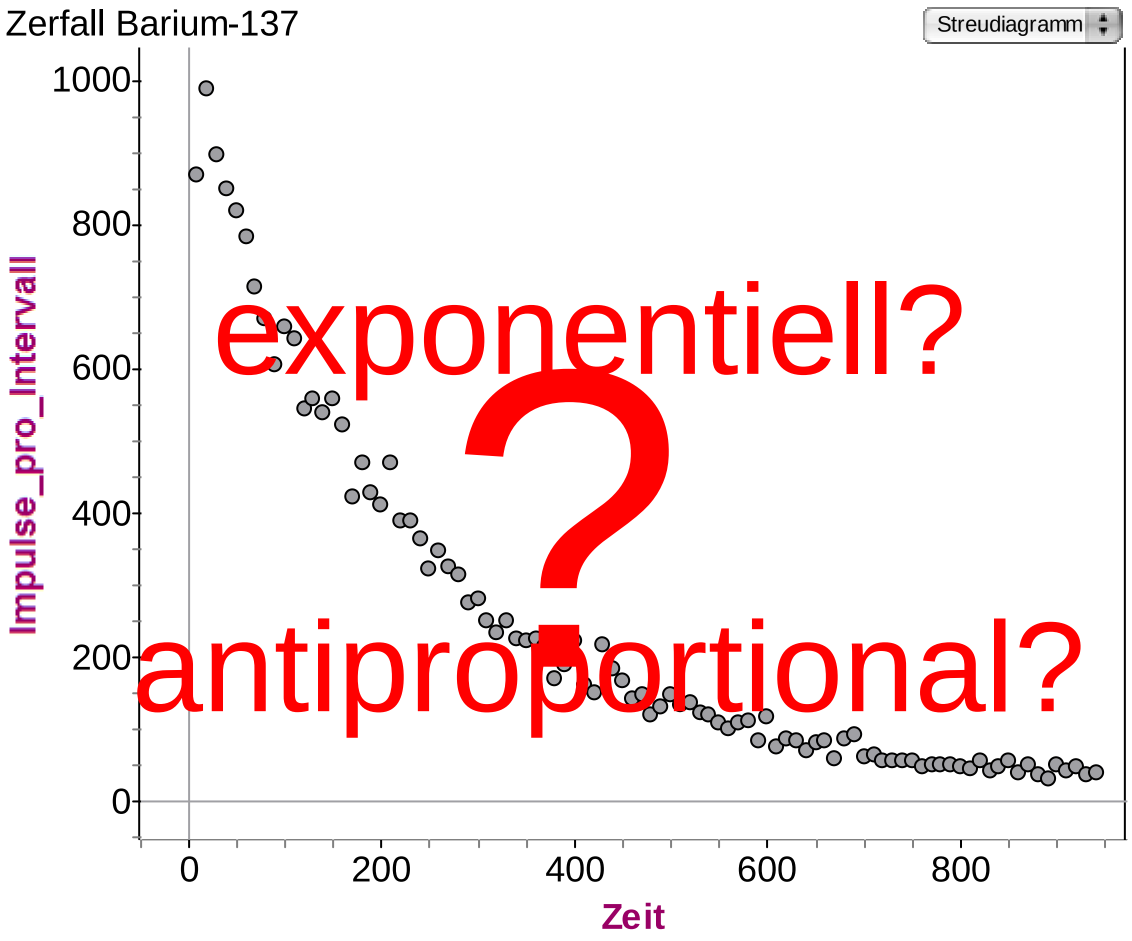
Abbildungen zwischen (endlichen) Mengen, z.B.
jedem Kind wird sein Geburtsdatum zugeordnet



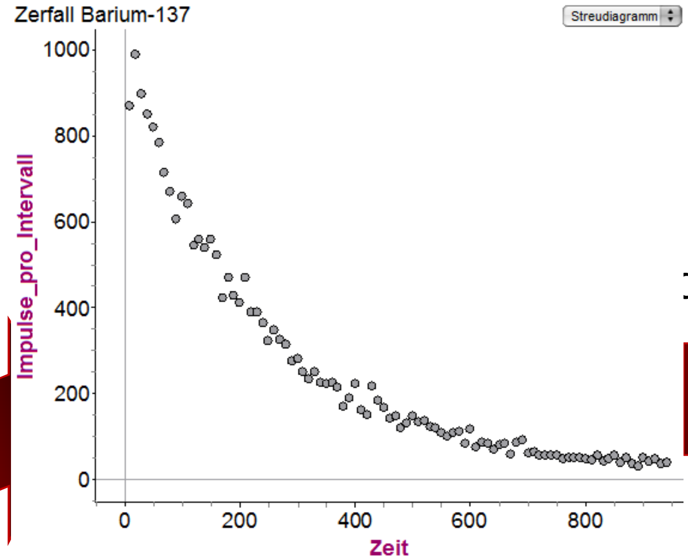
Folgen $$n \longrightarrow a_n = n^2$$

Abbildungen in der Geometrie als Funktionen, z.B.
Spiegelungen, Drehungen,..

… und ihre Anwendung



Funktionen als Modelle

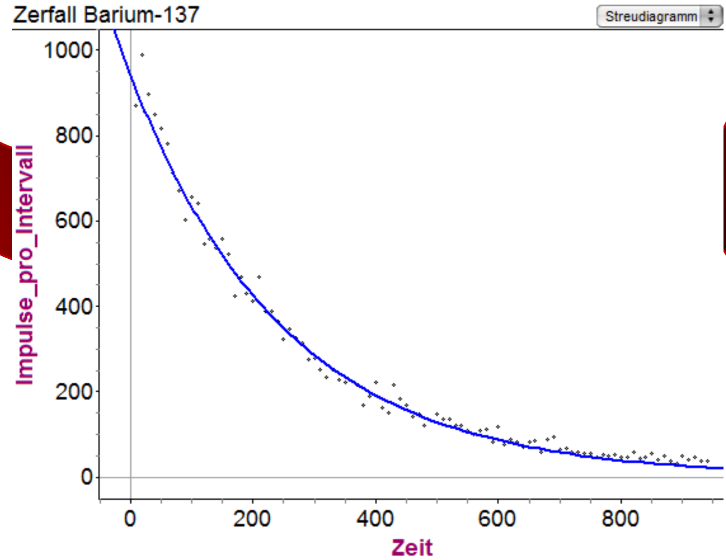


Interpretation von Datenstruktur durch Reflexion von Funktionen

Erschließung von Gesetzmäßigkeit durch Gebrauch von Funktionen

Reale Modellebene

Mathematische Modellebene



Daten:

Vermitteln Phänomene der natürlichen, technischen und sozialen Umwelt

Interpretation von Datenstruktur durch Reflexion von Funktionen

Erschließung von Gesetzmäßigkeit durch Gebrauch von Funktionen

Reale Modellebene

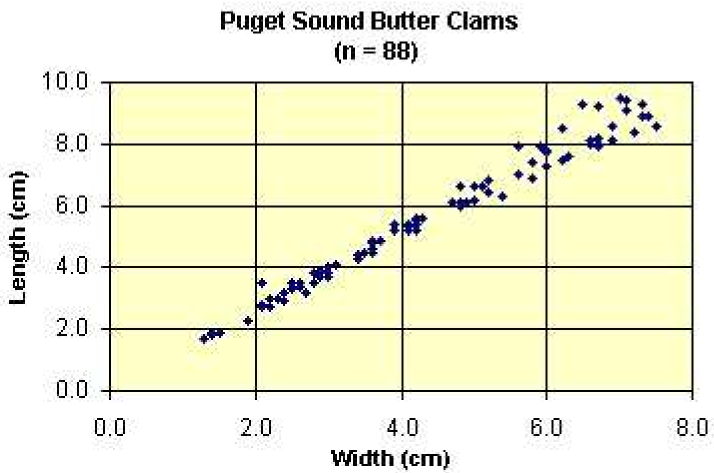
Mathematische Modellebene

Funktionen:

Bilden als „deterministisches Modellierungskonzentrat“ den Datentrend ab.

Beispiele (QELP-Projekt)

Lineare Funktionen:



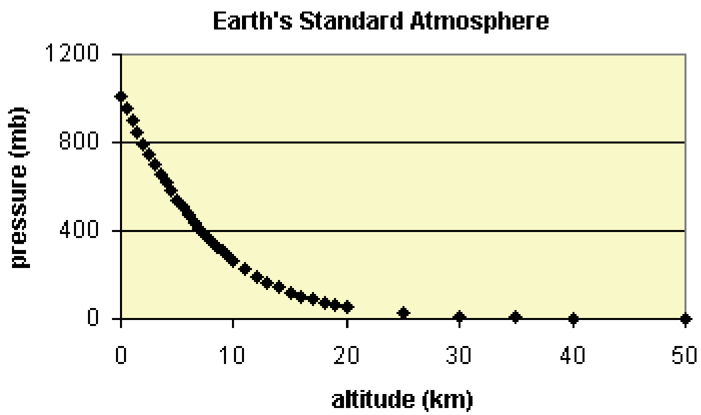
oder Abbrenngeschwindigkeit einer Kerze, …

Quadratische Funktionen:

z.B. Fallbewegungen, Anhalteweg eines Autos, …

Exponentialfunktionen:

z.B. Abkühlungsprozesse oder …



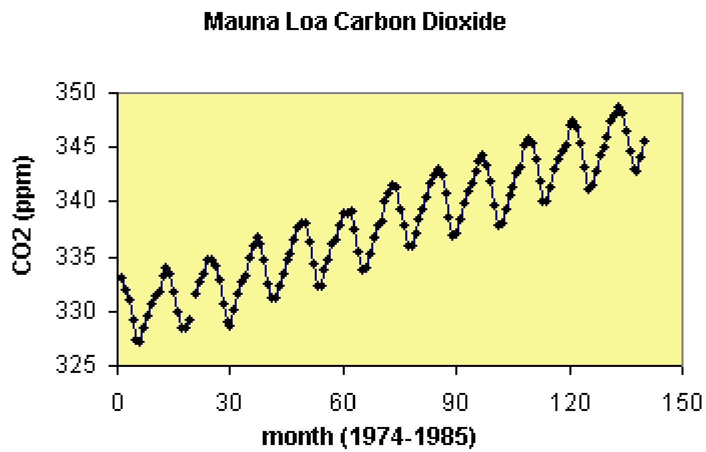
Beispiele (QELP-Projekt)

Gebrochenrationale Funktionen:

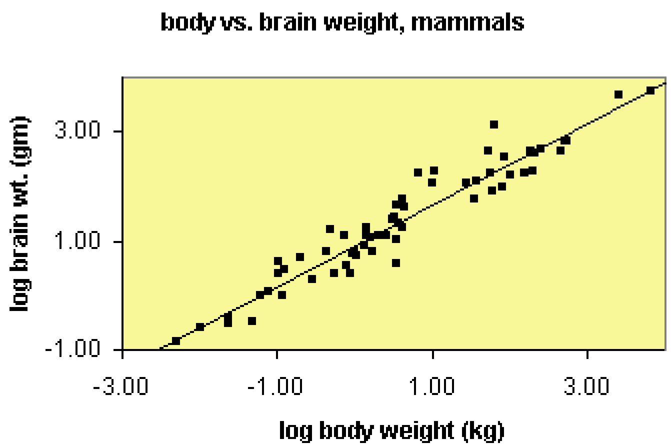
z.B. Parallelschaltung von Widerständen, …

Periodische Funktionen:

Federpendel, …



Potenzfunktionen (allg.):



Wie kommt man zur Funktion:

$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$

Funktionstyp bekannt: Eigenschaften und Parameter?

z.B. Geradensteigung, …

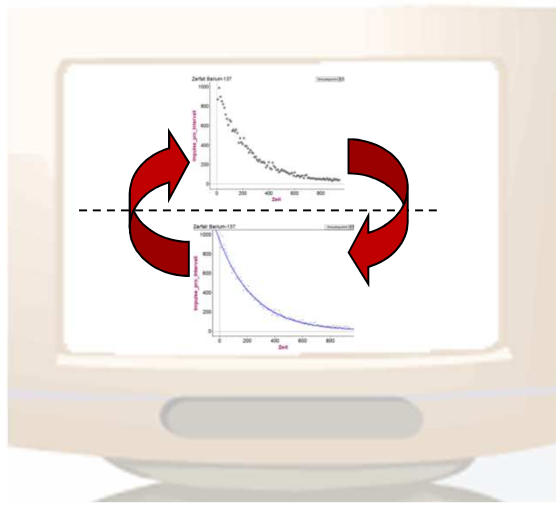
Kontext erlaubt Annahmen über lokales Änderungs-verhalten: Differenzen- bzw. Differenzialgleichungen

z. B.: $x_{n+1} = 0{,}5x_n - 0{,}02x_n^2$

Regression

linear oder nichtlinear

Daten glätten



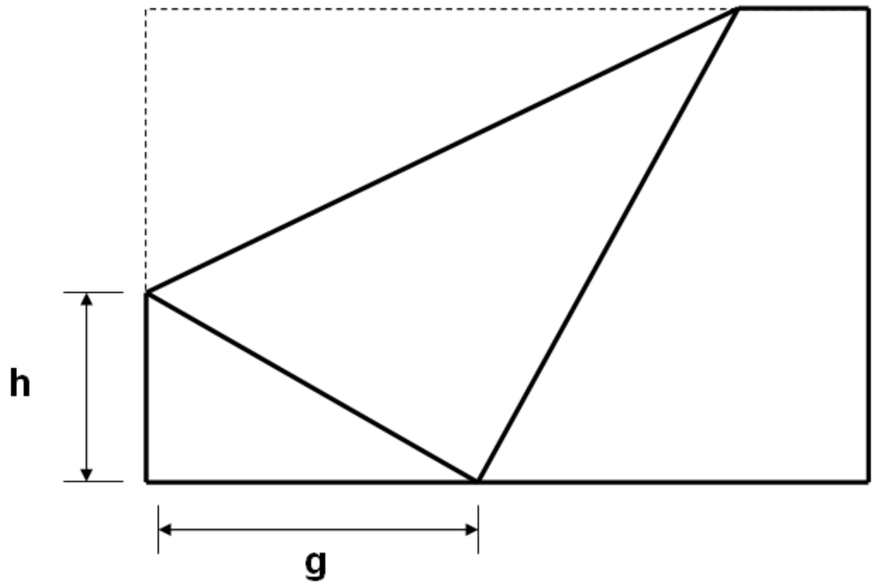
Funktion

Gliederung

1. Einstiegsbeispiel
2. Funktionen als Modelle
3. Aufgabe
4. Ergebnisse und Revision
5. Grundsätzlich zu beachten
6. Abschluss

Papierfaltproblem:

Schülerauftrag:
Nehmen Sie ein DIN A4-Blatt.
Falten Sie die linke obere Ecke und die untere Seite so, wie es im Bild rechts zu sehen ist. Es entsteht ein rechtwinkliges Faltdreieck mit den Seiten g und h sowie der sich daraus ergebenden Fläche F.



Führen Sie 15 Messungen durch und untersuchen Sie den funktionalen Zusammenhang zwischen der Seite g und dem Flächeninhalt F.

Gliederung

1. Einstiegsbeispiel

2. Funktionen als Modelle

3. Aufgabe

4. Ergebnisse und Revision

5. Grundsätzlich zu beachten

6. Abschluss

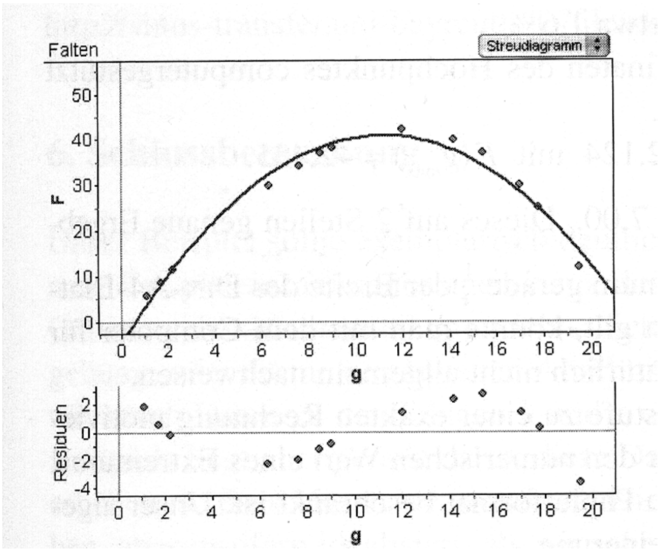
Papierfaltproblem:

Falten

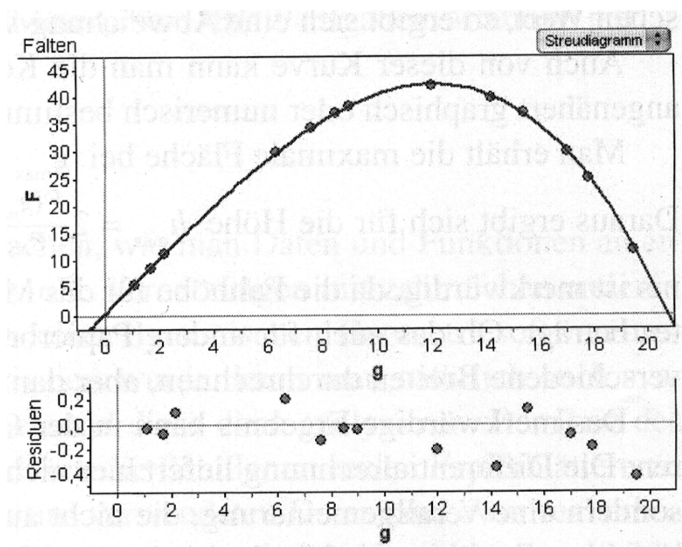
	g	h	F
=			$\frac{g \cdot h}{2}$
1	14,2	5,6	39,76
2	1,7	10,2	8,67
3	6,3	9,5	29,925
4	9,0	8,5	38,25
5	17,0	3,5	29,75
6	1,1	10,4	5,72
7	2,2	10,3	11,33
8	7,6	9,0	34,2
9	15,4	4,8	36,96
10	17,8	2,8	24,92
11	19,5	1,2	11,7
12	8,5	8,7	36,975
13	12,0	7,0	42

Abb. 2: Datentabelle

Quadratische Anpassung:

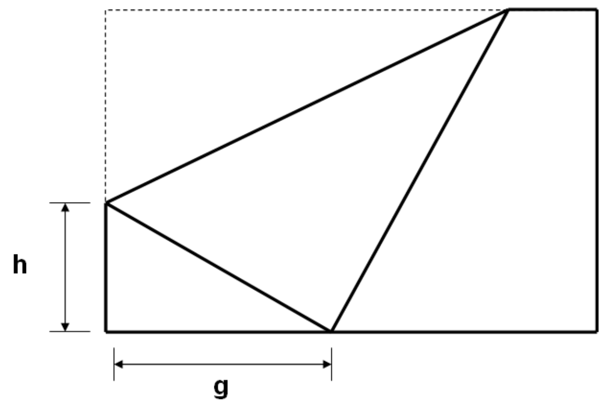


Kubische Anpassung:



Papierfaltproblem:

Theoretische Herleitung:

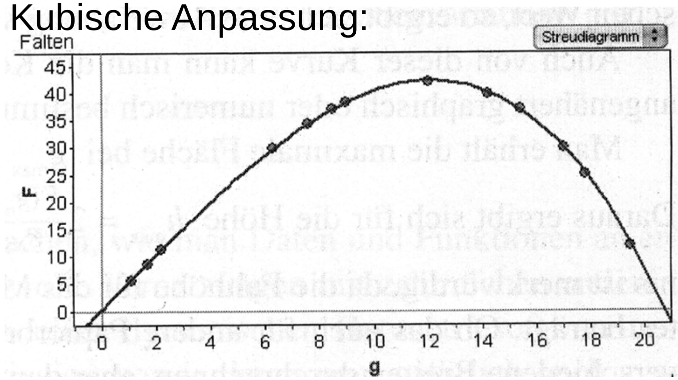


$$h + x = 21, x^2 = h^2 + g^2$$
$$(h - 21)^2 = h^2 + g^2$$
$$h^2 - 2 \cdot 21h + 21^2 = h^2 + g^2$$
$$h = -\frac{g^2}{2 \cdot 21} + \frac{21^2}{2 \cdot 21}$$

$$F(g,h) = \frac{1}{2} g \cdot h = \frac{1}{2} g \cdot \left(-\frac{g^2}{2 \cdot 21} + \frac{21^2}{2 \cdot 21} \right)$$

$$F(g) = -\frac{1}{4 \cdot 21} g^3 + \frac{21^2}{4 \cdot 21} g = -\frac{1}{4 \cdot 21} g(g^2 - 21^2)$$
$$= -\frac{1}{84} g(g - 21)(g + 21)$$

Kubische Anpassung:



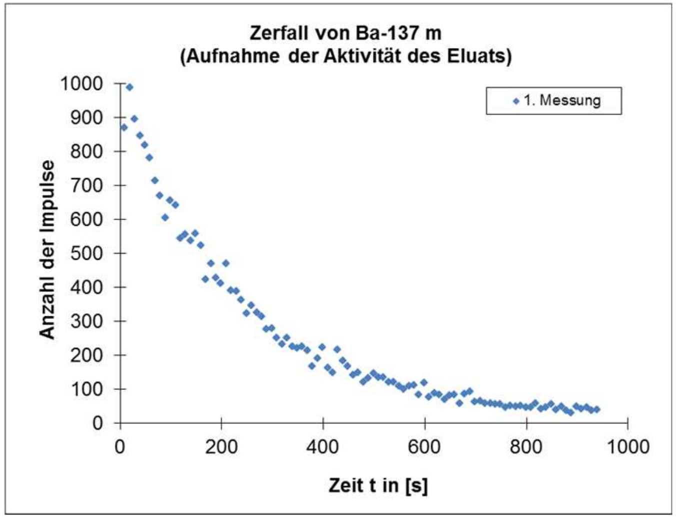
Gliederung

1. Einstiegsbeispiel
2. Funktionen als Modelle
3. Aufgabe
4. Ergebnisse und Revision
5. Grundsätzlich zu beachten
6. Abschluss

Grundsätzlich zu beachten

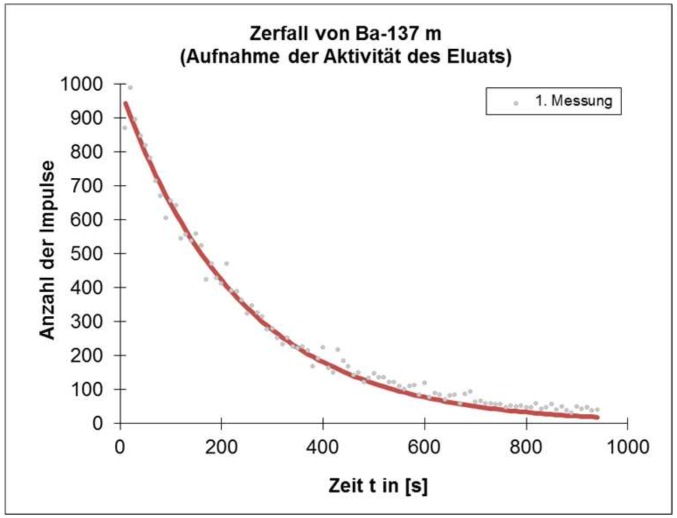
Residuen beachten!

Daten:
Vermitteln Phänomene der natürlichen, technischen und sozialen Umwelt

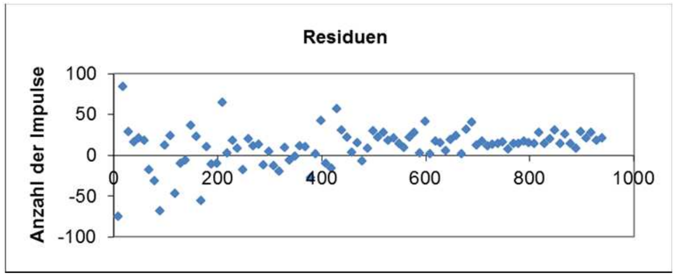


Reale Modellebene

Funktionen:
Bilden als „deterministisches Modellierungs-konzentrat“ (nur) den Datentrend ab.



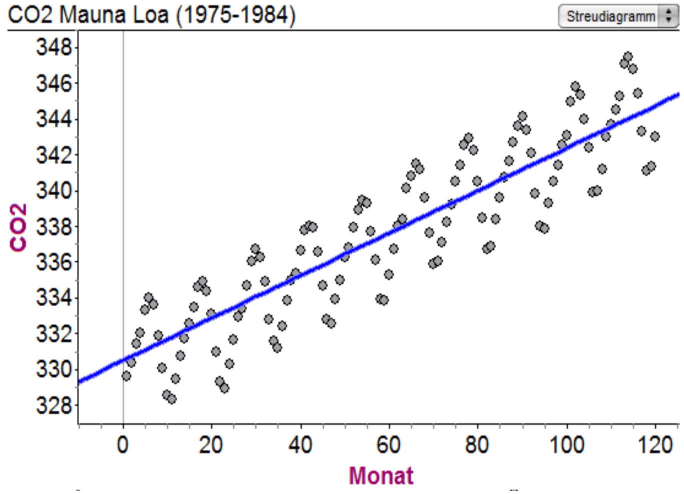
„+“



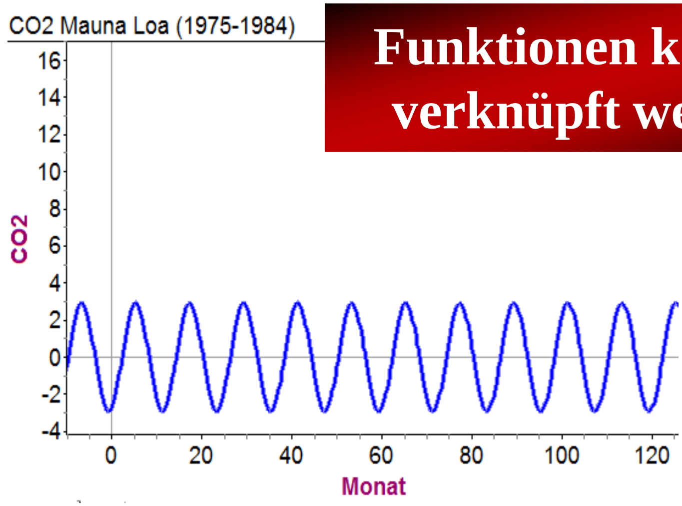
Residuen:
Bilden die unerklärte Variabilität der Daten ab.

Mathematische Modellebene

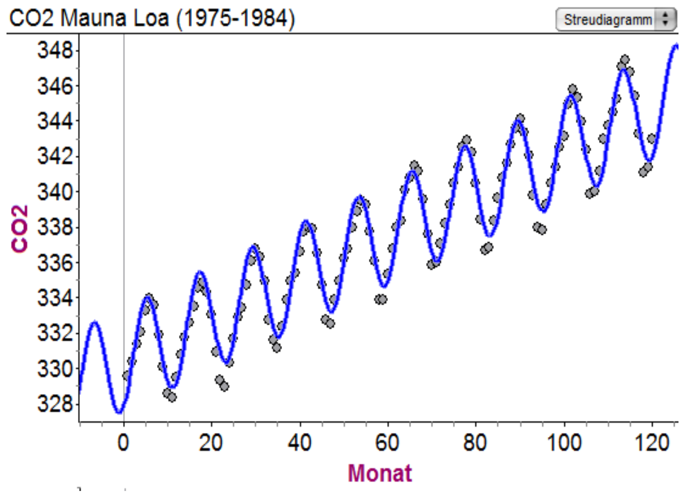
Grundsätzlich zu beachten



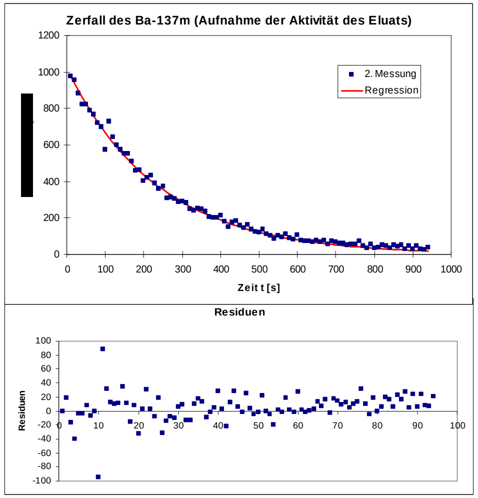
„+“

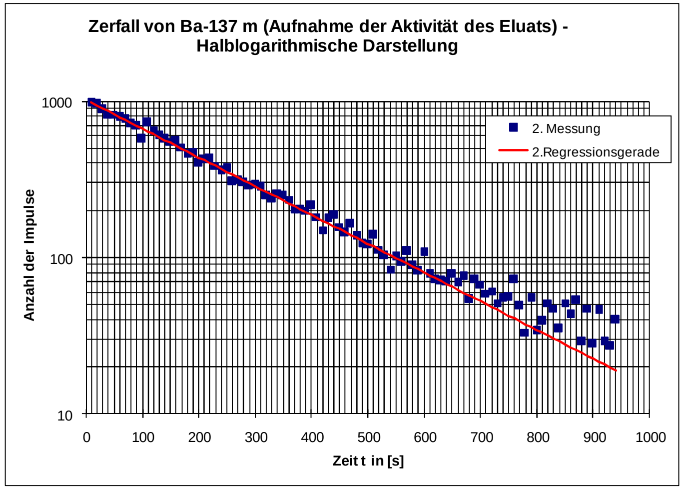


Funktionen können verknüpft werden

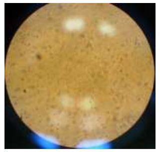


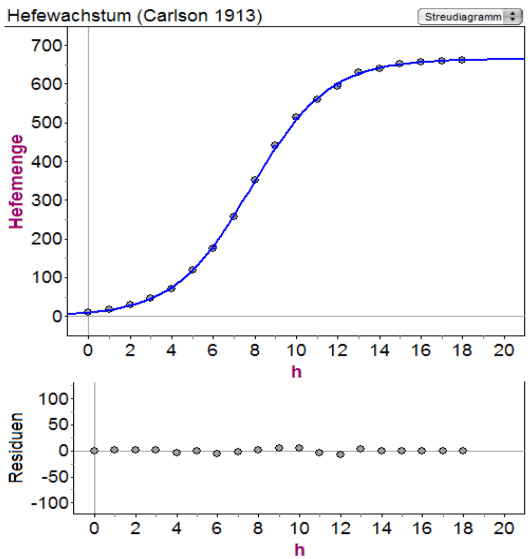
Grundsätzlich zu beachten





Trans-formations-techniken





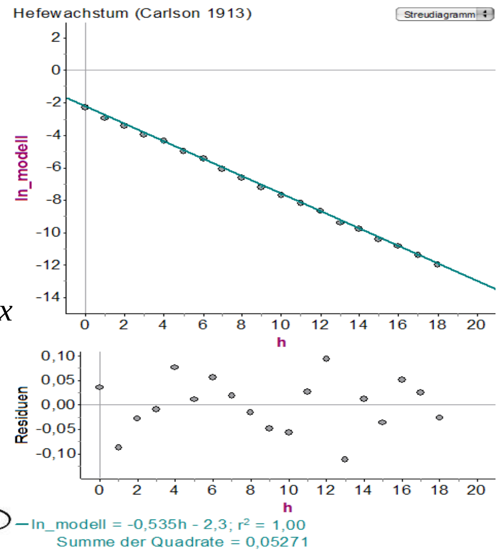
Die logistische Funktion

$$f(x)=\frac{G}{(G-y_0)\cdot e^{-G\cdot c\cdot x}+y_0}$$

umformen nach:

$$\ln\left(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{G}\right)=\ln\left(\frac{G-y_0}{G\cdot y_0}\right)-c\cdot G\cdot x$$

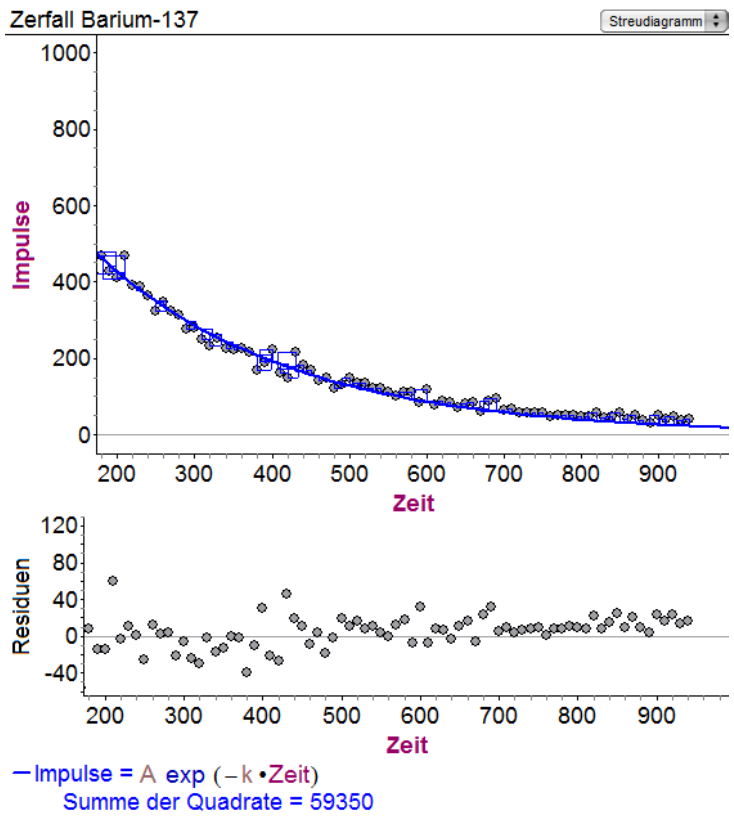
Wenn das logistische Modell passt, sollte sich eine lineare Struktur ergeben können.



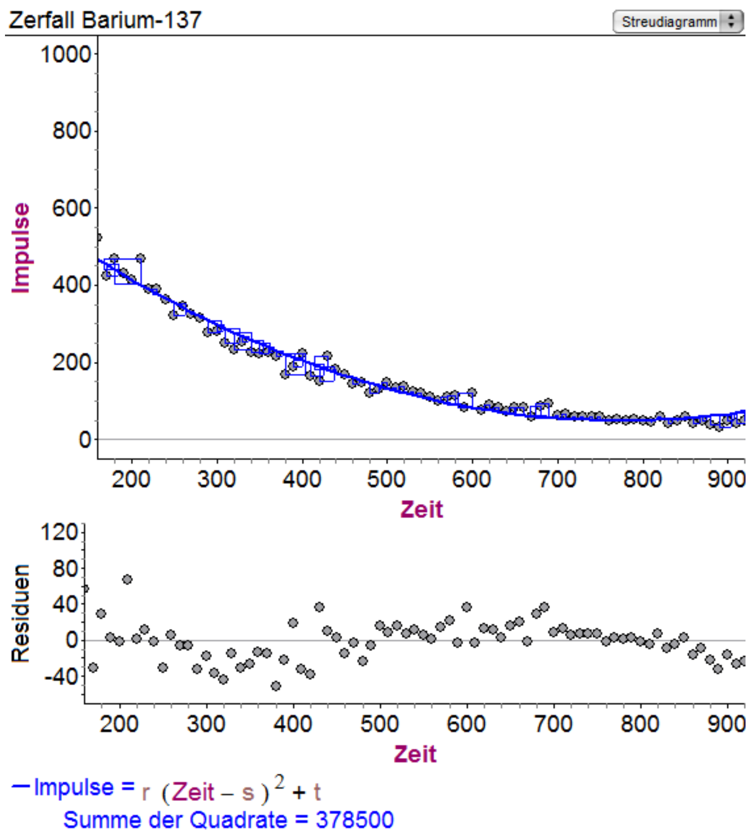
Funktionseigenschaften beachten!

Allein grafisch basierte Anpassung reicht nicht aus!

exponentiell?



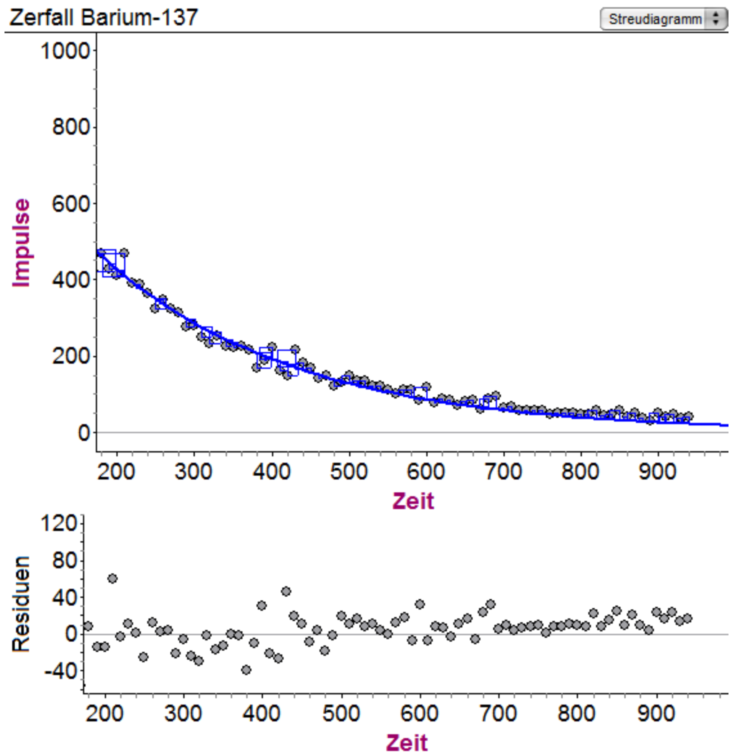
quadratisch?



Funktionseigenschaften beachten!

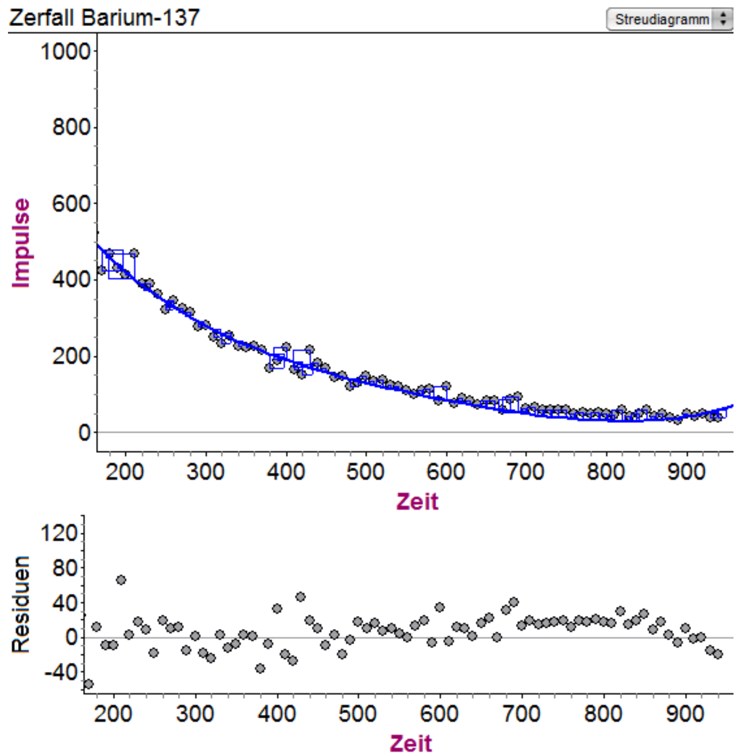
Allein grafisch basierte Anpassung reicht nicht aus!

exponentiell?



— Impulse = A exp $(-k \cdot \text{Zeit})$
Summe der Quadrate = 59350

Polynom 4. Grades?

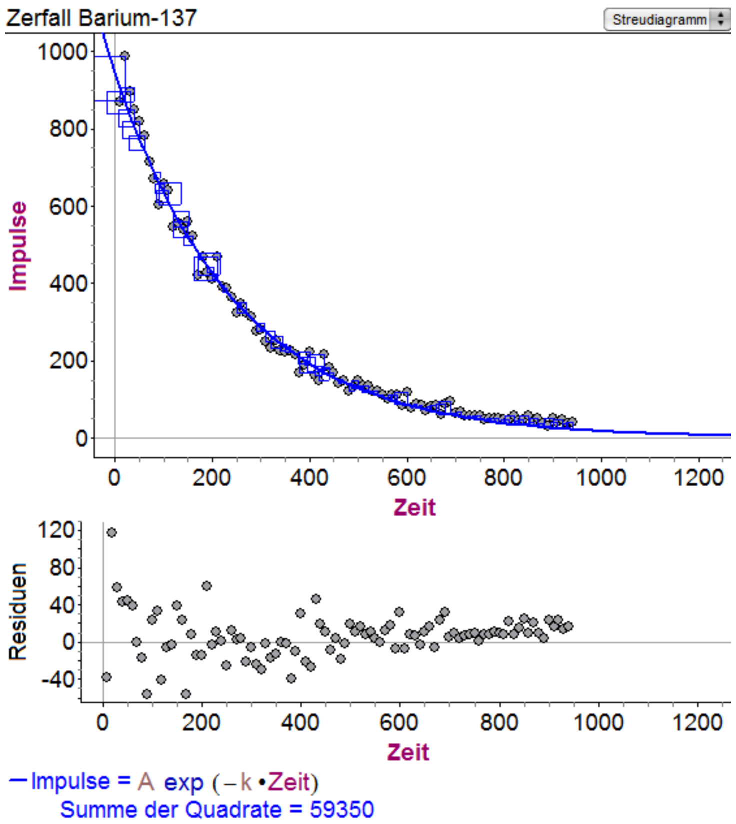


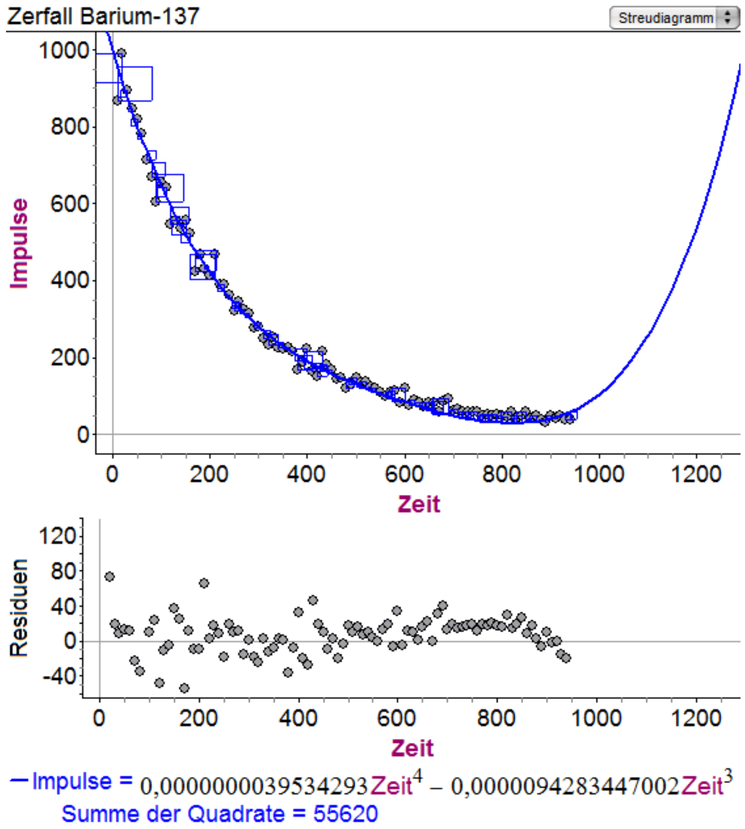
— Impulse = $0{,}0000000039534293\,\text{Zeit}^4 - 0{,}0000094283447002\,\text{Zeit}^3$
Summe der Quadrate = 55620

Funktionseigenschaften beachten!

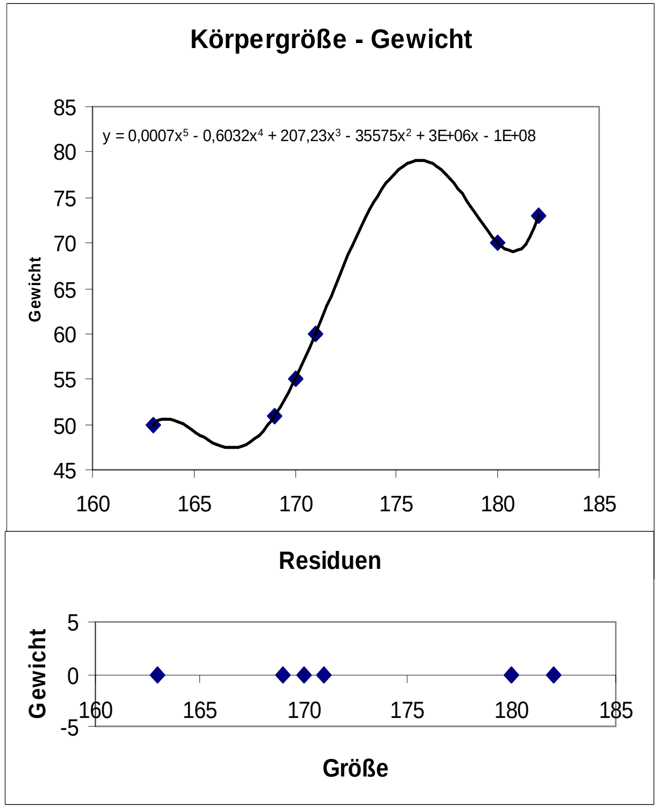
Allein grafisch basierte Anpassung reicht nicht aus!

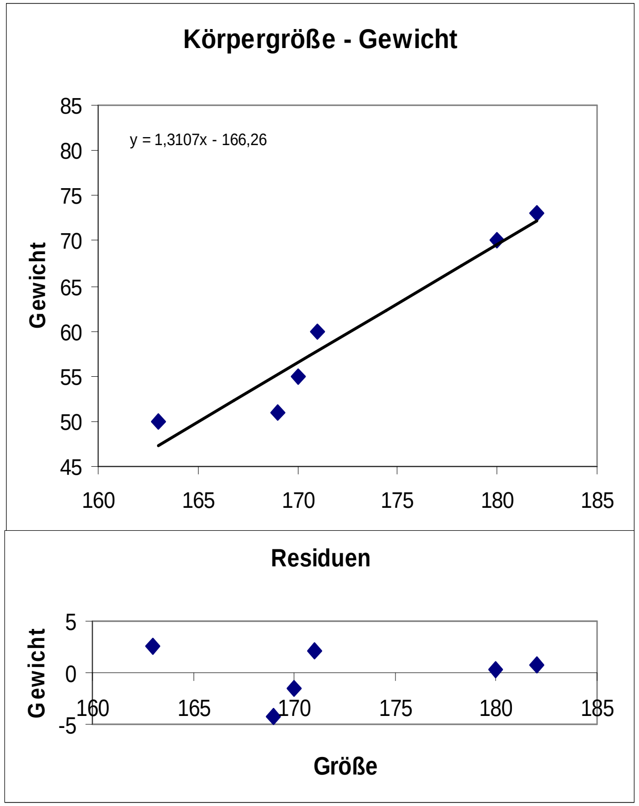
exponentiell?	Polynom 4. Grades?





Modellierungsgüte: Keine Residuen – das beste Modell?





"Essentially, all models are wrong, but some are useful." (Box & Draper, 1987)

1. Einstiegsbeispiel
2. Funktionen als Modelle
3. Aufgabe
4. Ergebnisse und Revision
5. Grundsätzlich zu beachten
6. Abschluss

Abschluss

Die Wurzel des Funktionsbegriffs liegt im Feststellen, Fordern, Erzeugen und Wiedergeben von Abhängigkeiten (oder Verbindungen) zwischen Variablen, die in der physischen, sozialen, geistigen Welt und zwischen diesen Welten auftreten.

(Freudenthal, 1983)

Dabei wird deutlich, dass funktionale Beziehungen im engeren Sinn zur Beschreibung von Zusammenhängen in der Natur nicht ausreichen, sondern dass man zumindest stochastische Zusammenhänge zulassen muss.

(Vollrath, 1989)

Vielen Dank für Ihre

Aufmerksamkeit!