

Daten und Zufall *und* Rechner

-
wann, wo und wie hilft der
Rechner im
Stochastikunterricht



Andreas Eichler, Freiburg

Daten und Zufall


Gliederung

1. Einstiegsbeispiel
2. Wieso, weshalb, warum?
3. Aufgaben – aber wie (mit/ohne Rechner)?
 - Fragen beantworten statt Algorithmen abarbeiten – Elementarisierung (Visualisierung)
 - Masse bewältigen (Rechenknecht)
 - Experimente die Fragen anregen (Simulation I)
 - M&M in Sek. I und Sek. II (Test-Simulation)
 - Verkehrszählung in Sek. I und Sek. II (Schätz-Simulation)
 - Weitere Simulationen als Schlüssel zum Verständnis
 - Wer sucht, der findet
4. Ideen hinter den Aufgaben und hinter dem Rechner
5. Werbeblock

Andreas Eichler, Freiburg & Markus Vogel (Heidelberg)  Leverkusen, 20.11.2010

Daten und Zufall



Andreas Eichler, Freiburg & Markus Vogel (Heidelberg)  Leverkusen, 20.11.2010

Daten und Zufall

Gliederung

1. Einstiegsbeispiel
2. **Wieso, weshalb, warum?**
3. Aufgaben – aber wie (mit/ohne Rechner)?
 - Fragen beantworten statt Algorithmen abarbeiten – Elementarisierung (Visualisierung)
 - Masse bewältigen (Rechenknecht)
 - Experimente die Fragen anregen (Simulation I)
 - M&M in Sek. I und Sek. II (Test-Simulation)
 - Verkehrszählung in Sek. I und Sek. II (Schätz-Simulation)
 - Weitere Simulationen als Schlüssel zum Verständnis
 - Wer sucht, der findet
4. Ideen hinter den Aufgaben und hinter dem Rechner
5. Werbeblock

Andreas Eichler, Freiburg & Markus Vogel (Heidelberg)  Leverkusen, 20.11.2010

1. Einstiegsbeispiel
2. Wieso, weshalb, warum?
3. **Aufgaben – aber wie (mit/ohne Rechner)?**
 - **Fragen beantworten statt Algorithmen abarbeiten – Elementarisierung (Visualisierung)**
 - Masse bewältigen (Rechenknecht)
 - Experimente die Fragen anregen (Simulation I)
 - M&M in Sek. I und Sek. II (Test-Simulation)
 - Verkehrszählung in Sek. I und Sek. II (Schätz-Simulation)
 - Weitere Simulationen als Schlüssel zum Verständnis
 - Wer sucht, der findet
4. Ideen hinter den Aufgaben und hinter dem Rechner
5. Werbeblock

Fragen beantworten statt Algorithmen abarbeiten – Elementarisierung



Aufgabe:
Gibt es eigentlich einen Zusammenhang zwischen erster und zweiter Sprungweite?

1. Der standardisierte Weg
Tabellierte Daten

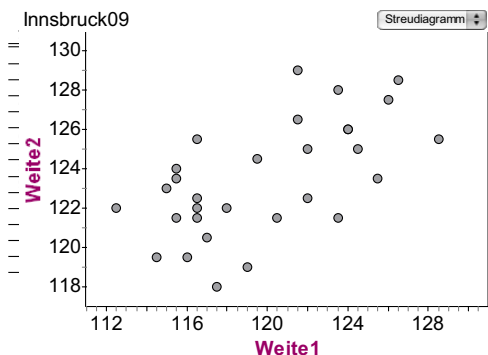
Platz	Name	Weite 1	Weite 2	Platz	Name	Weite 1	Weite 2
1	Schmitt	128,5	125,5	16	Evensen	119	119
2	Loitzl	126,5	128,5	17	Watase	118	122
3	Schlierenzauer	126	127,5	18	Eggenhofer	117,5	118
4	Annon	125,5	123,5	19	Larinto	117	120,5
5	Morgenstern	124,5	125	20	Uhrmann	116,5	125,5
6	Kasai	124	126	21	Hilde	116,5	122,5
7	Neumayer	124	126	22	Ito	116,5	121,5
8	Hautamaki	123,5	128	23	Schoft	116,5	122
9	Rodliakow	123,5	121,5	24	Stoch	116	119,5
10	Olli	122	125	25	Hoche	115,5	124
11	Koch	122	122,5	26	Koudelka	115,5	123,5
12	Vassilev	121,5	129	27	Lackner	115,5	121,5
13	Jacobsen	121,5	126,5	28	Yumoto	115	123
14	Malyz	120,5	121,5	29	Kofler	114,5	119,5
15	Kuettel	119,5	124,5	30	Tochimoto	112,5	122

Fragen beantworten statt Algorithmen abarbeiten – Elementarisierung



Aufgabe:
Gibt es eigentlich einen Zusammenhang zwischen erster und zweiter Sprungweite?

1. Der standardisierte Weg
Punktwolke

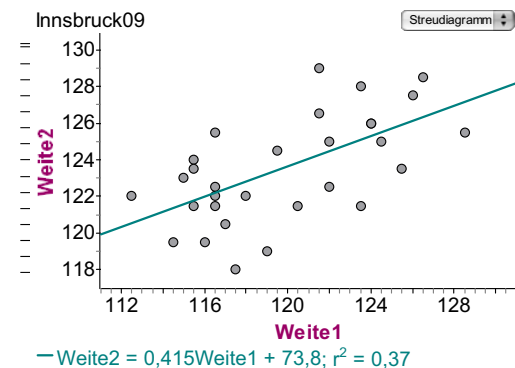


Fragen beantworten statt Algorithmen abarbeiten – Elementarisierung



Aufgabe:
Gibt es eigentlich einen Zusammenhang zwischen erster und zweiter Sprungweite?

1. Der standardisierte Weg
Regressionsgerade + Korrelation



Fragen beantworten statt Algorithmen abarbeiten – Elementarisierung



1. Der standardisierte Weg
Formalisieren

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}))}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{Cov(X, Y)}{s_X^2}$$

$$b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$$

$$r = \frac{Cov(X, Y)}{s_X \cdot s_Y}$$



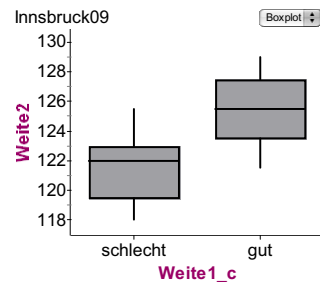
Aufgabe:

Gibt es eigentlich einen Zusammenhang zwischen erster und zweiter Sprungweite?

Fragen beantworten statt Algorithmen abarbeiten – Elementarisierung



2. Alternativer Weg
Qualitativer Vergleich - Clustern



Aufgabe:

Gibt es eigentlich einen Zusammenhang zwischen erster und zweiter Sprungweite?

Fragen beantworten statt Algorithmen abarbeiten – Elementarisierung



2. Alternativer Weg
Datensammlung

Platz	Name	Weite 1	Weite 2	Platz	Name	Weite 1	Weite 2
1	Schmitt	128,5	125,5	16	Evensen	119	119
2	Loitzl	126,5	128,5	17	Watase	118	122
3	Schlierenzauer	126	127,5	18	Eggenhofer	117,5	118
4	Amman	125,5	123,5	19	Larinto	117	120,5
5	Morgenstern	124,5	125	20	Uthmann	116,5	125,5
6	Kasai	124	126	21	Hilde	116,5	122,5
7	Neumayer	124	126	22	Ito	116,5	121,5
8	Hautamaki	123,5	128	23	Schoft	116,5	122
9	Rodliakow	123,5	121,5	24	Stoch	116	119,5
10	Olli	122	125	25	Hoce	115,5	124
11	Koch	122	122,5	26	Koudelka	115,5	123,5
12	Vassilev	121,5	129	27	Lackner	115,5	121,5
13	Jacobsen	121,5	126,5	28	Yumoto	115	123
14	Malyz	120,5	121,5	29	Kofler	114,5	119,5
15	Kuettel	119,5	124,5	30	Tochimoto	112,5	122

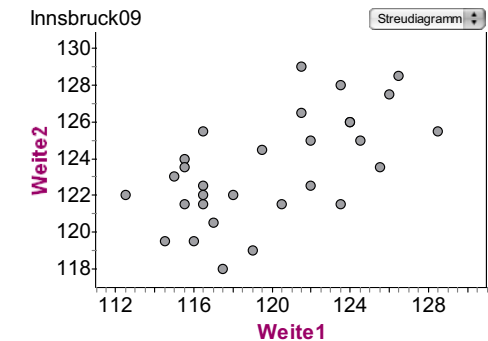
Aufgabe:

Gibt es eigentlich einen Zusammenhang zwischen erster und zweiter Sprungweite?

Fragen beantworten statt Algorithmen abarbeiten – Elementarisierung



2. Alternativer Weg
Punktwolke



Aufgabe:

Gibt es eigentlich einen Zusammenhang zwischen erster und zweiter Sprungweite?

Fragen beantworten statt Algorithmen abarbeiten – Elementarisierung

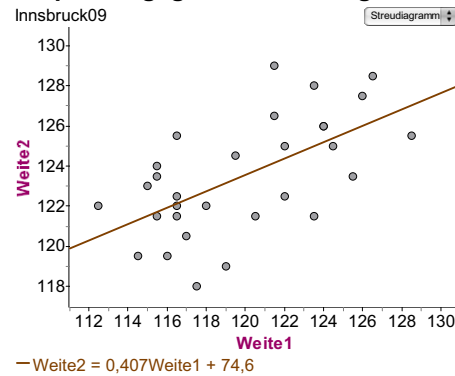


Aufgabe:

Gibt es eigentlich einen Zusammenhang zwischen erster und zweiter Sprungweite?

2. Alternativer Weg

Anpassungsgerade nach Augenmaß



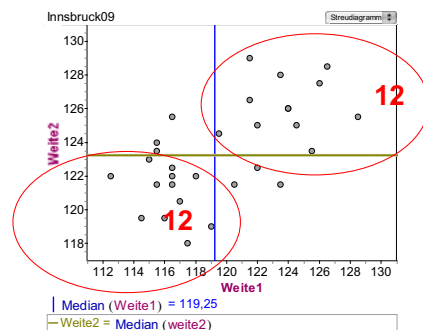
Fragen beantworten statt Algorithmen abarbeiten – Elementarisierung



Aufgabe:

Gibt es eigentlich einen Zusammenhang zwischen erster und zweiter Sprungweite?

2. Alternativer Weg „Ausgezählter“ Korrelationskoeffizient



$$r_z = \frac{n^+ - (n - n^+)}{n} = \frac{24 - 6}{30} = 0,6 \quad (r \approx 0,61)$$

Fragen beantworten statt Algorithmen abarbeiten – Elementarisierung

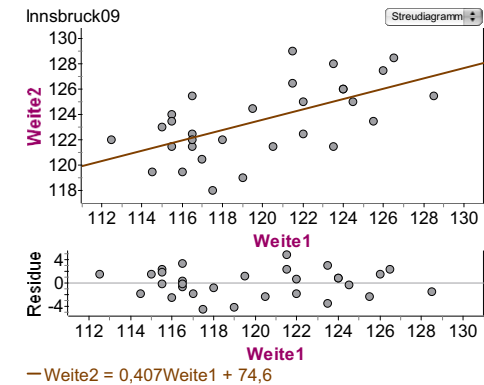


Aufgabe:

Gibt es eigentlich einen Zusammenhang zwischen erster und zweiter Sprungweite?

2. Alternativer Weg

Anpassungsgerade nach Augenmaß



Fragen beantworten statt Algorithmen abarbeiten – Elementarisierung



Der Rechner

nach dem händischen Bearbeiten

für

- komplexere Berechnungen
- Elementarisierungen
- Visualisierungen

Aufgabe:

Gibt es eigentlich einen Zusammenhang zwischen erster und zweiter Sprungweite?

1. Einstiegsbeispiel
2. Wieso, weshalb, warum?
3. **Aufgaben – aber wie (mit/ohne Rechner?)**
 - Fragen beantworten statt Algorithmen abarbeiten – Elementarisierung (Visualisierung)
 - **Masse bewältigen (Rechenknecht)**
 - Experimente die Fragen anregen (Simulation I)
 - M&M in Sek. I und Sek. II (Test-Simulation)
 - Verkehrszählung in Sek. I und Sek. II (Schätz-Simulation)
 - Weitere Simulationen als Schlüssel zum Verständnis
 - Üben
 - Wer sucht, der findet
4. Ideen hinter den Aufgaben und hinter dem Rechner
5. Werbeblock

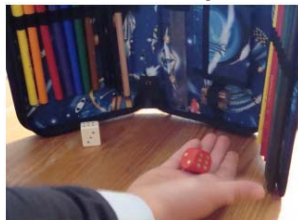
Masse bewältigen



Aufgabe:
 Welche Eigenschaften haben Studierende/SchülerInnen

Der Rechner
 nach händischen Bearbeitungen als Rechenknecht und für eine grafisch gesteuerte Analyse

Experimente, die zu Fragen anregen



Modell für die Würfel						
Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Wahrscheinlichkeit	0,05	0,1	0,35	0,35	0,1	0,05

$$P(N) = P(Q) = 0,5$$

Es fällt die Augenzahl x

Der Rechner
 nach händischen Bearbeitungen für die unmittelbare Auswertung und Vertiefung des Verständnisse

Aufgabe:
 Die Spielleitung wählt verdeckt den normalen oder den quaderförmigen Würfel aus. Welcher ist es?

$$P(N|x) = \frac{P(x|N) \cdot P(N)}{P(x|N) \cdot P(N) + P(x|Q) \cdot P(Q)}$$

Verarbeiten der Information (x) und Anwendung der Formel von Bayes führt zu Neubewertung

1. Einstiegsbeispiel
2. Wieso, weshalb, warum?
3. **Aufgaben – aber wie (mit/ohne Rechner?)**
 - Fragen beantworten statt Algorithmen abarbeiten – Elementarisierung (Visualisierung)
 - **Masse bewältigen (Rechenknecht)**
 - **Experimente die Fragen anregen (Simulation I)**
 - **M&M in Sek. I und Sek. II (Test-Simulation)**
 - Verkehrszählung in Sek. I und Sek. II (Schätz-Simulation)
 - Weitere Simulationen als Schlüssel zum Verständnis
 - Üben
 - Wer sucht, der findet
4. Ideen hinter den Aufgaben und hinter dem Rechner
5. Werbeblock

M&M – Sek I/II



Erweiterungen und Präzisierungen

- Schätzt ab, bevor Ihr Eure Tüte öffnet, was in der Tüte sein wird
- ...

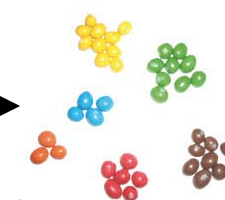
Aufgabe:

Untersucht die Inhalte dieser Tüten.

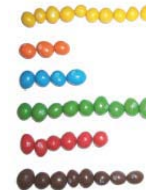
- offen
- noch besser: die Frage wird von Schülern gestellt



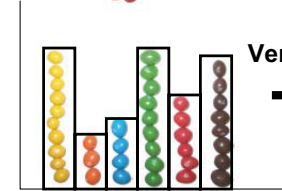
Ordnen



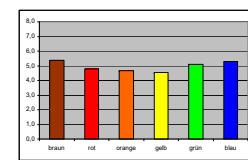
Darstellen



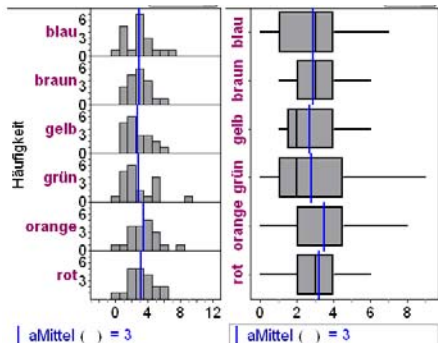
Abstrahieren



Verallgemeinern



- Erhebung (Beobachtung) planen
- Daten grafisch darstellen
- Mittelwerte
- Einfluss der Stichprobengröße
- ...



Aufgabe:

Untersucht die Inhalte dieser Tüten.

- offen
- noch besser: die Frage wird von Schülern gestellt

Modell:

In einer Packung sind durchschnittlich 18 Schokolinsen und im Durchschnitt je 3 Linsen einer Farbe



Hieb- und Stichaufgaben:

Wenn das Modell stimmt, wie groß wäre dann die Wahrscheinlichkeit, in einer Packung

- genau 3 rote Kugeln zu erhalten
- mindestens eine rote Kugel zu erhalten

• Baum, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$



Zurück zur Realität:

Wenn das Modell stimmt, welche Wahrscheinlichkeit haben dann die verschiedenen Anzahlen roter Kugeln in einer Packung?

Aufgabe:

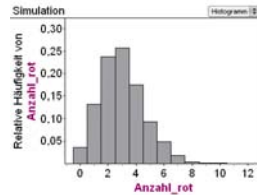
Untersucht die Inhalte dieser Tüten.

- offen
- noch besser: die Frage wird von Schülern gestellt



Zurück zur Realität:

Wenn das Modell stimmt, welche Wahrscheinlichkeit haben dann die verschiedenen Anzahlen roter Kugeln in einer Packung?



Aufgabe:

Untersucht die Inhalte dieser Tüten.

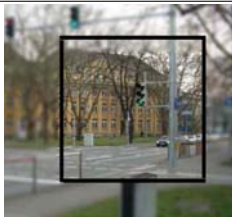
- offen
- noch besser: die Frage wird von Schülern gestellt

Informeller Hypothesentest:

Ab welcher Anzahl von roten Kugeln in einer Packung könnte/sollte man an dem Modell der Gleichbefüllung zweifeln? Welchen Fehler könnte man begehen?

1. Einstiegsbeispiel
2. Wieso, weshalb, warum?
3. **Aufgaben – aber wie (mit/ohne Rechner?)**
 - Fragen beantworten statt Algorithmen abarbeiten – Elementarisierung (Visualisierung)
 - **Masse bewältigen (Rechenknecht)**
 - **Experimente die Fragen anregen (Simulation I)**
 - **M&M in Sek. I und Sek. II (Test-Simulation)**
 - **Verkehrszählung in Sek. I und Sek. II (Schätz-Simulation)**
 - Weitere Simulationen als Schlüssel zum Verständnis
 - Üben
 - Wer sucht, der findet
4. Ideen hinter den Aufgaben und hinter dem Rechner
5. Werbeblock

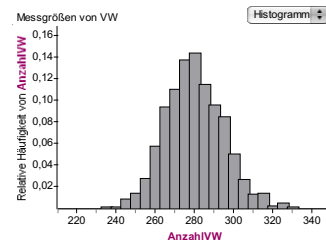
Verkehrszählung in Sek. I und Sek. II (Schätz-Simulation)



Zufall:

- $h(VW) \approx P(VW) = 0,33$; **385** bei 1166 gezählten PKW in Braunschweig
- Sind das genau 33 %?

- Wäre $P(VW) = 0,25$ auch möglich?
- Hieb- und Stichaufgabe
- Simulation oder Berechnung mit $p = 0,25$ und $n = 1166$



Aufgabe:

Verkehrszählung

Anzahl der VW



Verkehrszählung in Sek. I und Sek. II (Schätz-Simulation)



Zufall:

- Konfidenzintervall (Approximation durch die Normalverteilung, 95%-Niveau):
- $0,303 < p < 0,357$

Aufgabe:

Verkehrszählung

Anzahl der VW



- Wann (Wo) würde man an diesem Modell zweifeln?
- Niedersachsen: $p \approx 0,35$
- Deutschland: $p \approx 0,20$
- Wie würde eine solche Zählung in Stuttgart/München/Köln ... enden?

1. Einstiegsbeispiel
2. Wieso, weshalb, warum?
3. **Aufgaben – aber wie (mit/ohne Rechner?)**
 - Fragen beantworten statt Algorithmen abarbeiten – Elementarisierung (Visualisierung)
 - **Masse bewältigen (Rechenknecht)**
 - **Experimente die Fragen anregen (Simulation I)**
 - **M&M in Sek. I und Sek. II (Test-Simulation)**
 - **Verkehrszählung in Sek. I und Sek. II (Schätz-Simulation)**
 - **Weitere Simulationen als Schlüssel zum Verständnis**
 - Wer sucht, der findet
4. Ideen hinter den Aufgaben und hinter dem Rechner
5. Werbeblock

1. Einstiegsbeispiel
2. Wieso, weshalb, warum?
3. **Aufgaben – aber wie (mit/ohne Rechner?)**
 - Fragen beantworten statt Algorithmen abarbeiten – Elementarisierung (Visualisierung)
 - **Masse bewältigen (Rechenknecht)**
 - **Experimente die Fragen anregen (Simulation I)**
 - **M&M in Sek. I und Sek. II (Test-Simulation)**
 - **Verkehrszählung in Sek. I und Sek. II (Schätz-Simulation)**
 - Weitere Simulationen als Schlüssel zum Verständnis
 - **Wer sucht, der findet**
4. Ideen hinter den Aufgaben und hinter dem Rechner
5. Werbeblock

Weitere Simulationen als Schlüssel zum Verständnis

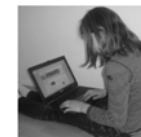


Konfidenzintervalle



Tests

Wer sucht, der findet

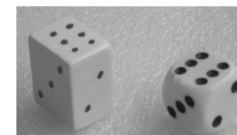


Aufgaben zur realen Realität

Aufgaben zu konstruierten realen Situationen



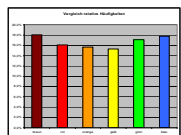
Konstruierte Situationen



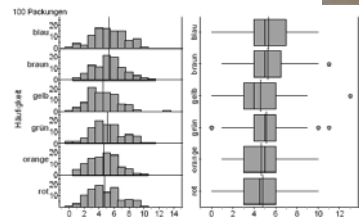
1. Einstiegsbeispiel
2. Wieso, weshalb, warum?
3. **Aufgaben – aber wie (mit/ohne Rechner?)**
 - Fragen beantworten statt Algorithmen abarbeiten – Elementarisierung (Visualisierung)
 - **Masse bewältigen (Rechenknecht)**
 - **Experimente die Fragen anregen (Simulation I)**
 - **M&M in Sek. I und Sek. II (Test-Simulation)**
 - **Verkehrszählung in Sek. I und Sek. II (Schätz-Simulation)**
 - Weitere Simulationen als Schlüssel zum Verständnis
 - **Üben**
 - Wer sucht, der findet
4. **Ideen hinter den Aufgaben und hinter dem Rechner**
5. Werbeblock

Andreas Eichler, Freiburg & Markus Vogel (Heidelberg)  Leverkusen, 20.11.2010

2. Flexible Datendarstellungen



Unterschiedliche Darstellungen der Daten eröffnen unterschiedliche Perspektiven!



	braun	rot	orange	gelb	grün	blau
absolut	553	494	481	469	525	545
relativ	18,0%	16,1%	15,7%	15,3%	17,1%	17,8%

Andreas Eichler, Freiburg & Markus Vogel (Heidelberg)  Leverkusen, 20.11.2010

Aspekte des statistischen Denkens (Pfannkuch/Wild, 1999)

1. Notwendigkeit von Daten



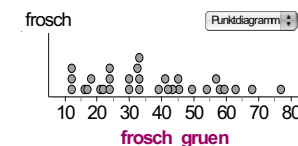
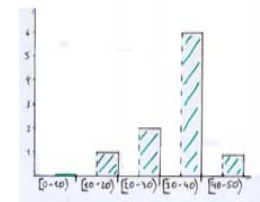
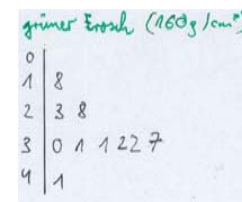
„Ahnungslosigkeit ist die Objektivität der schlichteren Gemüter“ (Harald Schmidt)

„Frauen können rückwärts nicht einparken“
und
„Männer hören nie zu“

Daten als Grundlage für einen “guten” Erkenntnisgewinn

Andreas Eichler, Freiburg & Markus Vogel (Heidelberg)  Leverkusen, 20.11.2010

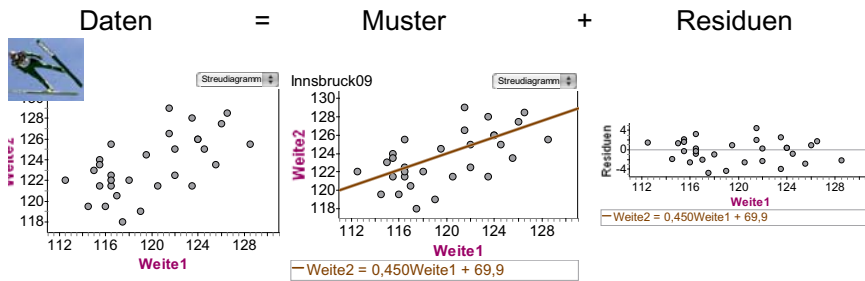
3. Datenstreuung oder Variabilität!



Messungen von Objekten unterscheiden sich! Nicht Uniformität, sondern Variabilität ist Gegenstand stochastischen Denkens.

Andreas Eichler, Freiburg & Markus Vogel (Heidelberg)  Leverkusen, 20.11.2010

4. Struktursuche, Mustererkennung, Musterbeschreibung



Stochastisches Denken und der Rechner

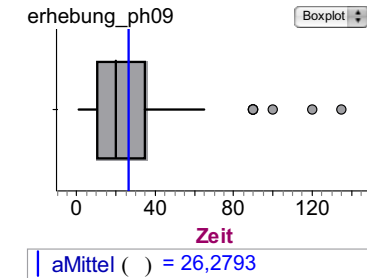
- Notwendigkeit von Daten – ???
- Flexible Darstellung – mit dem Rechner unmittelbar möglich
- Erkennen der Variabilität – Simulieren zeigt Variabilität
- Muster entdecken – Residuenanalyse setzt den Rechner voraus
- Integration von Daten und Kontext – reale Datenmengen benötigen den Rechner



5. Zusammenhang von Zahl und Kontext

$$\bar{x} = 53,6$$

Im Durchschnitt benötigen Studierende etwa 54 Minuten für den Hin- und Rückweg zur bzw. von der Hochschule



Rechner und Leitidee Daten und Zufall

- Rechner ersetzt nicht das Verständnis, aber hilft bei
- Bewältigen großer Datenmengen
- visuell gesteuerter Datenanalyse
- Simulation
- Elementarisierung konventioneller Methoden
- Vertieftem Verstehen von Zusammenhängen (Interaktive Grafik)

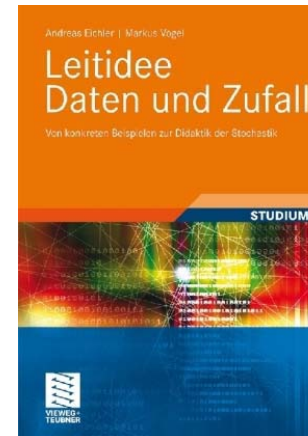


Beispiele für zentrale Ideen der Stochastik, die unmittelbar im Unterricht einsetzbar sind

Entfaltung der zentralen didaktischen Ideen anhand tragender Beispiele

Ergänzung durch:

- Spezialthemen/-Beispiele
- didaktische Forschung
- „wichtige“ Literaturbeispiele
- fachliche Skizzen



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Rückmeldung erwünscht:
andreas.eichler@ph-freiburg.de
www.leitideedatenundzufall.de

Vieweg+Teubner
ISBN 3-8348-0681-1
ISBN 978-3-8348-0681-9

