Werner, B. (2007) Diagnose und Förderung im Bereich der Zahlbegriffsentwicklung

(In: Walter, J./Wember, F. (2007) (Hrsg.) Sonderpädagogik des Lernens (Band 2 Handbuch Sonderpädagogik): Göttingen: Hogrefe 571 – 590)

Hinweis: Bedingt durch zeitliche Diskrepanzen zwischen der Erstellung des Beitrags und der Veröffentlichung des Werkes sind in diesem Beitrag Veröffentlichungen nach 2004 nicht berücksichtigt.

1. Das Wesen der Zahl und die Theorie des Zahlbegriffes

Die Frage, was eine Zahl ist bzw. das Problem nach dem Wesen der Zahl beschäftigt die Menschheit seit Jahrtausenden. Zahlen begründen nicht nur das Wesen von Mathematik, sondern sind ebenso ein philosophischer wie naturwissenschaftlich interessanter Forschungs- und Erkenntnisgegenstand.

In unserem Alltag operieren wir ständig mit Zahlen; Zahlwörter wie Million und Milliarden gehören zum allgemeinen Sprachgebrauch. Trotz schulischer Misserfolge in Mathematik haben wir „rechnen“ gelernt und gehen kompetent mit Zahlen in unterschiedlichsten Alltagssituationen und verschiedenen Darstellungsformen um.

Zahlen können Ordnungssysteme herstellen und zugleich Unendlichkeit strukturieren; Zahlen strukturieren unseren Alltag, geben uns eine Orientierung, stellen eine Ordnung her. Mit Hilfe von Zahlen beschreiben wir Unendlichkeiten ebenso wie Begrenztheit. Mit Hilfe dieses Symbolsystems können wir eindeutig Anzahlen, Mengen, Längen, Flächen, Volumina erfassen; gleichzeitig versuchen wir uns damit die unbegrenzte Unendlichkeit des Raumes vorzustellen.

Daneben haben Zahlen in unserer Alltagskultur eine große Bedeutung als Kriterium für Wertigkeiten und Äquivalenzen¸ auf unterhaltsame und zugleich tiefgründige Art wird dies beispielsweise in den Geschichten aus „Der kleine Prinz“ (Saint-Exupery) deutlich. Letztlich stellt auch das Geld in unserer heutigen Form nichts anders als einen numerischen Vergleichswert für den Waren-, Gebrauchs- und Tauschwert unterschiedlichster Güter dar.

Obwohl Zahlen zunächst - im Gegensatz zu Worten - entpersonalisiert, emotionslos wirken, haben viele Menschen Lieblingszahlen. Erinnert sei an die mystische Bedeutung von Zahlen, so sind beispielsweise in Märchen bedeutungstragende Ereignisse, Situationen, Handlungen häufig mit den Zahlen Drei oder Sieben (Wünsche, Brüder, Zwerge Rätsel usw.) verbunden. Nicht zuletzt sei die rätselhafte Zahl 13 erwähnt, die ja auch im heutigen Alltag häufig zu Unbehagen u.a. führt.

Um sich dem Wesen der Zahlen zu nähern, ist ein kurzer historischer Rückblick interessant. In der pythagoreischen Schule (400 v.C.) galt die Geometrie i.S. der Erd(ver)messung als der wichtigste Zweig der Wissenschaft (Kordos, 1999, S. 62). Da jeder Raum aus unendlich vielen Punkten besteht, war es notwendig, mit dieser unendlichen Anzahl von Punkten umzugehen und eine Unterscheidung zwischen einer ‚aktualen’, d.h. einer momentan existierenden und einer ‚potentiellen’, d.h. möglichen Anzahl zu treffen (Kordos, 1999, S. 63). Aus dieser Situation heraus entwickelte sich die Notwendigkeit, zu zählen. Zählen stellt sich in der Historie als ein brauchbares Werkzeug zur Unterscheid- und Vergleichbarkeit gleichartiger Größen dar. Nachweise dieser Alltagskultur finden sich bereits 30.000 Jahre v.C. in Altsteinzeitgesellschaften (Paturi, 1998, S. 40). Kerbzeichen auf Knochen belegen den

Gebrauch natürlicher Zahlen sowohl als Ordnungs- als auch als Kardinalzahlen. Darüber hinaus finden sich auf diesen Knochen Kerbmarken, die teilweise in Fünfergruppen zusammenfasst sind und somit Vorformen von Bündelungen darstellen.

Die ersten Ziffernsymbole in Form von Hieroglyphen lassen sich bereits bei den Sumerern 3000 Jahre v.C. finden. Zusammen mit den Zeichen der Keilschrift entwickelten sie entsprechende Zahlzeichen. Um 2250 v.C. werden in Mesopotamien (heute Irak) diese Keilzahlzeichen einem dezimalen Zahlensystem angepasst. Im 18. Jahrhundert v.C. entwickeln babylonische Mathematiker das heute bekannte Positionssystem für mehrstellige Zahlen. Um 250 v.C. verwenden die Babylonier erstmals ein eigenes Schriftzeichen für die Null als Leerstelle bei den Zahlen. Das uns heute bekannte arabische Ziffernalphabet taucht im 8. Jahrhundert auf; es braucht ca. 700 Jahre, um sich in ganz Europa durchzusetzen. (Paturi, 1998, S. 58)

All diese Daten markieren lediglich die Geschichte der Schriftzeichen und beantworten die Frage nach der Herkunft, dem Ursprung der Zahl selbst noch nicht.

Bei der Frage nach dem Ursprung bzw. dem Wesen von Zahlen werden zwei historische Entwicklungslinien unterschieden:

- Die ältere, eine idealistische Argumentation geht auf Pythagoras (ca. 600 v.C.) zurück und behauptet, Zahlen existierten schon immer, ihre Existenz ist unabhängig vom Menschen. Zahlen seien demnach von Menschen ebenso wie naturwissenschaftlichen Phänomene durch besonders zielgerichtete Beobachtungen einfach nur zu entdecken (Wember, 2003, S. 50). Kant, eine Protagonist dieser Auffassung, die Zahl sei ein vor-, naturgegebener und unveränderbarer Gegenstand unseres Denken formuliert dies folgendermaßen: „dass eigentliche mathematische Sätze jederzeit Urtheile a priori und nicht empirisch sind … die reine Mathematik …, deren Begriff es schon mit sich bringt, dass sie nicht empirische, sondern bloß reine Erkenntniß a priori enthalte“ (Kant, 1787/1995, S. 59).
- Die zweite Auffassung, historisch viele Jahrhunderte später entstanden, erfasst die Zahl als eine kognitive Konstruktion. Zahlen sind demnach nicht unabhängig vom Menschen, sondern von ihnen erfunden, konstruiert worden. Ganz im Sinne eines kognitiven Werkzeuges dienen sie dazu, ihre Probleme innerhalb ihrer Alltagskultur zu lösen. Wittgenstein (1994) beschreibt dies im Zusammenhang mit der „Unerbittlichkeit“ der Mathematik wie folgt: „Zählen (und das heißt: *so* zählen) ist eine Technik, die tagtäglich in den mannigfachen Verrichtungen unseres Lebens verwendet wird. … Aber ist dieses Zählen nicht nur ein Gebrauch; entspricht dieser Folge nicht auch eine Wahrheit? Die *Wahrheit* ist, dass das Zählen sich bewährt hat“ (Wittgenstein, 1994, S. 37).

Zahlreiche Befunde (u.a. Brainerd, 1979; Damerow, 1993; Piaget, 1965; v. Glasersfeld, 1997) und sicher auch unsere eigenen alltäglichen Erfahrungen sprechen für die konstruktivistische Position. Besonders Zahlen sind ein eindrucksvolles Beispiel dafür, dass es in unserem Denken Themen, Gegenstände gibt, deren Kenntnis nicht auf empirischen Erfahrungen beruht (Damerow, 1993, S. 195). Zahlen haben sich als Werkzeug innerhalb der kulturellen menschlichen Entwicklung als notwendig und sinnvoll herausgestellt. Sie wurden von den Menschen für die Menschen erfunden/konstruiert; ihr Umgang und besonders ihre Darstellung unterlag und unterliegt einem ständigen Wandel, einer ständigen Weiterentwicklung. Darüber hinaus darf nicht vergessen werden, dass Zahlsysteme somit Symbolsysteme sind, d.h. mit Hilfe abstrakter Zeichen, Begriffe und Symbole werden auf abstrakter Ebene quantitative, räumlich und zeitliche Beziehungen beschrieben. Form und Gebrauch unserer Zahlsysteme entstanden und sind abhängig von den kulturellen Rahmenbedingungen und unterliegen gesellschaftlichen Konventionen.

(Anmerkung: Nicht berücksichtigt werden in diesen Ausführungen Erklärungsmodelle, die von einem angeborenen bzw. genetisch bedingten Zahlbegriff bzw. Zahlensinn ausgehen, vgl. Dehaene, 1999; Johann, 1999; Devlin 2000. Aufgrund der noch sehr unklaren Forschungslage sind diese Positionen derzeit nicht eindeutig in den Lern- und Entwicklungsprozess einzuordnen).

Die Zahl ist nicht als Gegenstand an sich, sondern als gedankliches Konstrukt, als kognitive Konstruktion zu begreifen. Daher wird gerade in lern- und entwicklungspsychologischen, erkenntnistheoretischen, pädagogischen und didaktischen Kontexten vom Zahlbegriff gesprochen.

Was aber wird dann gedanklich konstruiert, wenn wir den Zahlbegriff bilden ? Eine kleine Episode eines Bischofs aus dem 17. Jahrhundert mag dies verdeutlichen: „Da war einmal ein Mann, der sprach im Schlaf. Als die Uhr die vierte Stunde schlug, sagte er: „Eins, eins, eins, eins – die Uhr ist ja verrückt, sie hat viermal eins geschlagen!"
Der Mann hatte offenbar viermal je einen Schlag wahrgenommen, nicht aber vier Schläge. Was er im Sinn hatte, war nicht vier , sondern vier mal eins, woraus man ersieht, dass Zählen etwas anderes ist, als mehrere Dinge gleichzeitig zu betrachten. Hätte ich vier Uhren in meiner Bibliothek, und alle vier schlügen eins zur gleichen Zeit, so würde ich nicht sagen, sie hätten vier geschlagen, sondern vier mal eins. Dieser Unterschied liegt nicht in den Dingen, unabhängig von den Operationen des Geistes. Im Gegenteil, er hängt vom Geist desjenigen ab, der zählt. Der Intellekt also findet keine Zahlen, sondern er *macht* sie; er betrachtet unterschiedliche Dinge, jedes an sich verschieden und vereinigt sie willentlich im Denken" (nach v. Glasersfeld, 1997, S. 264).

Bei der Bildung eines Zahlbegriffes abstrahieren wir von typischen physikalischen Eigenschaften eines Gegenstandes wie z.B. seiner Farbe, Form und Größe. Dass wir fünf Eiskugeln, Bücher oder Flugzeuge mit ein und demselben Zahlwort beschreiben, setzt eben diese Abstraktionen von den konkreten Gegenständen voraus. Die Zahl scheint uns zunächst als Ergebnis aus der Wahrnehmung von Einheit und Vielheit, d.h. die Vielheit wird zu einer Einheit zusammengefasst und als Einheit wahrgenommen.

Diese Zusammenfassung jedoch unterliegt allein unserer kognitiven Tätigkeit. Diese Einheiten zu bilden, ist das Ergebnis einer von einem wahrnehmenden Subjekt ausgeführten Operation und keine den Objekten innewohnende Eigenschaft. Um eine Vielheit zu konstruieren, muss der Wahrnehmende sich der Tatsache bewusst werden, dass er in diesem Zusammenhang (zwei oder mehr) Gegenstände als Angehörige ein und derselben Klasse kategorisiert hat (Klassifikation). Diese Kategorisierung stellt eine geistige Operation dar, die sich auf sensomotorische Erfahrungen bezüglich des Materials beziehen. Mit dieser Kategorisierung bzw. Klassenbildung haben wir Gegenstände miteinander vereinigt. Wie aber können nun diese Vielheiten, Klassen z.B. Eiskugeln, Bücher und Flugzeuge voneinander abgegrenzt werden? Dazu sind wiederum geistige Operationen nötig, die in der konkreten Ausführung häufig identisch wirken. Um innerhalb der gebildeten Einheit die Zahl der einzelnen Elemente genau festzustellen, wiederholen wir ein und dieselbe Tätigkeit, wir bilden aus den Einzelelementen eine Reihe und zählen ab: d.h. wir ordnen eineindeutig jedem Gegenstand genau ein Zahlwort zu. Mit de letztgenannten Zahlwort markieren wir sowohl das Ende der erfassten Gesamtheit als auch die Anzahl der dieser Gesamtheit innewohnenden Einzelelemente. D.h. ein Kind kann nur über operative Leistungen zum Zahlbegriff kommen.

In Anlehnung an Piaget (1965) läst sich der Zahlbegriff wie folgt definieren:
Der Zahlbegriff *stellt eine Abstraktion dar, die sich aus den Operationen Klassifikation und Seriation ergibt und zu einem System vereinigt worden ist.*

Die **Klassifikation** beschreibt dabei die Klassenbildung nach variablen Merkmalen, d.h. eine Klasse der gleichen Mächtigkeiten. Die **Seriation,** Reihenbildung trifft Relationsaussagen

über eine Zahl in Bezug zu anderen Zahlen, im Vergleich mit anderen Einheiten/Zahlen. Über die Seriation kommen wir zu den Aussagen wie: drei ist größer als vier; zwei ist kleiner als drei, vier ist um eins größer als drei.

Diese beiden elementaren Operationen: Mengen- und Reihenbildung (Seriation und Klassifikation) prägen den jahrhundertlangen Streit von Vertretern der Mathematik und der Philosophie über das Wesen der Mathematik. Nahezu alle bislang bekannten Versuche, die Zahl zu definieren lassen sich in diese zwei große Gruppen einteilen: einerseits die Zahldefinition i.S. der Kardinalzahltheorie, andererseits die Zahldefinition als Ordinalzahltheorie (Wember, 2003, S. 51).

Die Kardinalzahltheorie betont den Klassifikationsaspekt, die Ordinalzahltheorie hingegen den Aspekt der Relationen.

- Neben Gottlob Frege (1848 – 1025), Alfred Whitehead (1861 – 1947) gilt Bertrand Russel (1872 – 1970) als Vorläufer und bekanntester Vertreter der **Kardinalzahltheorie**. Er definierte natürliche Zahlen als kardinale. Mittels der Stück-für-Stück-Zuordnung wird die Anzahl bestimmt, d.h. jedem Element einer Menge A wird genau ein Element der Menge A' zugeordnet. Die gleiche Anzahl entspricht somit der gleichen Zahl, hier verstanden i.S. einer Mengenbezeichnung. Zahlbegriffe sind somit Klassenbegriffe, die beschreiben, wie viele Elemente eine Menge enthält. Eine Zahl dient der quantitativen Bezeichnung einer Menge. Nach der Russelschen Zahltheorie ist der Erwerb des Zahlbegriffs ein zweistufiger: zunächst verbinden wir die Zahlwörter ‚eins, zwei, drei' mit der Vorstellung, es sind viele. Eine Zahl sagt uns, wie viele Elemente in einer Menge vorhanden sind. Erst später lernen wir, dass eine Zahl auch etwas über die Position der Elemente innerhalb der Menge. In einer späteren Entwicklungsstufe, meist im Grundschulalter erreichen die Kinder die nächste Stufe und erkennen, dass eine Zahl beide Elemente enthält, die Angabe ‚wie viele' und ‚an welcher Stelle'.
- Die **Ordinalzahltheorie** gewichtet den Relationsaspekt der Zahlen sehr stark. Peano (1858 – 1932) geht davon aus, dass Zahlen eben nicht bestimmte Dinge repräsentieren, sondern eine bestimmte Art von Beziehungen darstellen: Zahlen stellen eine Art Progression/Reihung dar. Um die natürlichen Zahlen festzulegen bedarf es Peanos Meinung nach nur einer Reihe einfacher, aber eindeutiger Symbole wie 1,2,3 oder I, II, III und verlässlicher Ordnungsregeln (Wember, 2003, S. 52). Diese Prämissen fasst Peano in den folgenden fünf grundlegenden Axiomen zusammen:

    - 1 ist eine natürliche Zahl
    - Der Nachfolger jeder natürlichen Zahl ist eine natürliche Zahl
    - 1 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.
    - Verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger
    - Wenn eine Teilmenge von N die Zahl 1 enthält und mit jeder natürlichen Zahl auch deren Nachfolger, dann ist diese Teilmenge gleich N. (Schülerduden, 1990, S. 337) (In späteren Veröffentlichungen ersetzt Peano die Zahl 1 durch die Null).

  Die natürlichen Zahlen sind definiert als bestimmte arithmetische Fortschreibungen, die mit Eins beginnt und jede weitere Zahl dadurch gebildet wird, dass zu der vorherigen Zahl eine weitere hinzugefügt wird. Diese Theorie geht bei der Entwicklung des Zahlbegriffes davon aus, dass Kinder bereits im Vorschulalter den Umgang mit nicht numerischen Reihen lernen, z.B. indem sie Gegenstände nach der Größe ordnen, Begriffe wie kleiner/größer, mehr/weniger, anwenden. Dieser psychologische Zugang zu den Zahlen

sichert letztlich die Einsicht in den primär logischen Zugang der Zahlen (Moser-Opitz, 2001, S. 17).

Diese beiden Auffassungen prägten auch über viele Jahrzehnte die Diskussion innerhalb der Mathematikdidaktik, über den ‚richtigen' Weg zur Anbahnung und Vermittlung des Zahlbegriffs bei Kindern. Die jeweiligen Vertreter dieses Methodenstreits lassen sich aufgrund der beiden skizzierten Zahltheorien in die ‚Anschauungsmethodiker' und ‚Zählmethodiker' unterteilen (Radatz & Schipper, 1983, S. 37).

Die Anschauungsmethodiker gehen davon aus, dass die Zahlvorstellung sich durch die Abstraktion aus der Anschauung ergibt. Die Zahlen sind durch unmittelbare Anschauung zu erzeugen, entweder über eine simultane Erfassung der Gesamtmenge oder über geeignete, strukturierte Anschauungsbilder für die jeweiligen Mengen. Demgegenüber argumentierten die Zählmethodiker, dass die Zahl durch geistige Tätigkeit und nicht bloß durch sinnliche Wahrnehmung erzeugt wird. Durch die Tätigkeit des Zählens gelangt das Kind zur Zahl. Die Zahl wird dann sukzessiv erfasst und allmählich verinnerlicht das Kind die Einsicht, dass jede Zahl einen bestimmten Platz in einer Reihe hat.

Die von Radatz und Schipper (1983, S. 37) entwickelte Gegenüberstellung macht die wesentlichen Unterschiede beider methodische Zugänge deutlich:

Tab. 1: ‚Anschauer und Zähler' (Radatz & Schipper, 1983, S. 37)

‚Anschauer'	**‚Zähler'**
Zahlen bis 4 bzw. 5 können simultan erfasst werden	Es gibt keine simultane Zahlauffassung. Die schnelle Angabe der Zahleigenschaft beruht auf einem schnellen Auszählen der Objekte. Zahlen, welcher Größe auch immer – können nur zeitlich sukzessiv aufgefasst werden
Räumlich-simultane Zahldarstellung auch größerer Zahlen (mit simultan erfassbaren Vierer- und Fünfergruppen) sind wichtigste Veranschaulichungsmittel; Einsatz von flächig angeordneten Zahlenbildern	Einsatz von linearen Zählmaterialien
Betonung des Zahl- und Rechenmaterials als Grundlage der Anschauung	Betonung des Zähl- und Rechenvorganges
Betonung der statischen Aspekte von Addition und Subtraktion (Hier sind x, dort sind y Objekte. Wie viele sind es zusammen/wie groß ist der Unterschied?)	Betonung der dynamischen Aspekte von Addition und Subtraktion(du hast x Objekte und bekommst y dazu/gibst y ab. Wie viel hast du ?)
Schwergewicht bei der Analyse (Zahlen und ihre Zerlegung	Schwergewicht bei der Synthese (Zahlen und ihre Bausteine)
Betonung des kardinalen Zahlaspektes	Betonung des ordinalen Zahlaspektes
Aus heutiger Sicht:	

Mathematischer Hintergrund: Kardinalzahltheorie (Zahl als Äquivalenzklasse) Bevorteilt „visuelle Typen“ im Unterricht	Mathematischer Hintergrund: PEANO-Axiome mit Nachfolgerrelation Bevorzugt die „akustischen und motorischen“ Typen im Unterricht

In der Mathematikdidaktik zu Beginn des 20. Jahrhunderts setzen sich zunächst die ‚Anschauungsmethodiker’ durch. Erst Johannes Kühnel (1916) versuchte mit seinem „Neubau des Rechenunterrichtes“ diesen Streit zu beenden und favorisierte eine Methode, in der zuerst mit dem Zählen begonnen wurde, dann aber das simultane Erfassen von Mengen ohne Zählen mit Hilfe strukturierter Mengendarstellungen eingeführt und geübt (Odenbach, 1964, S. 12). Auch Johannes Wittmann, Mathematiker und Psychologe entwickelte eine Synthese aus beiden Zugängen. Mit seinem Werk „Theorie und Praxis eines ganzheitlichen, analytisch-synthetischen Unterrichtes“ (1929) favorisierte er das ganzheitliche Rechnen und prägte damit besonders nach dem II. Weltkrieg den Mathematikunterricht an den Grundschulen (Odenbach, 1964, S. 13).

Interessant ist, dass der bekannte Mathematikdidaktiker Adolf Kruckenberg aus Halle schon im Jahr 1935 bei der mathematisch-logischen Analyse des Zählprozesses Voraussetzungen formulierte, die in ähnlicher Weise heute unter den Fachvertretern breite Anerkennung und Anwendung finden:

1. Eine Reihe von konkreten oder abstrakten Gegenständen, die gezählt werden sollen;
2. dass diese Gegenstände als homogene Quanten gedacht werden;
3. eine Reihe von Zahlwörtern, die fest ist;
4. eine Zuordnung von Gegenstand und Zahlwort;
5. eine ein-eindeutige Zuordnung, d.h. jedem der zu zählenden Gegenstände nur ein Zahlwort zugeordnet werden darf;
6. dass die Anzahl stets dieselbe ist, einerlei, in welcher Reihenfolge die Dinge gezählt werden;
7. dass jede Zahl nur um ein Element, um 1 größer ist als das vorhergehende (Kruckenberg, 1935; in: Odenbach, 1964, S. 12)

Die nachfolgenden Zählprinzipien spiegeln sowohl erkenntnistheoretische als auch kulturhistorische und entwicklungspsychologische Aspekte wider. Nach Stern (1998, S. 55) in Rückgriff auf Gelman und Gallistel (1978) und Wynn (1990) begründet sich unsere Zählfertigkeit auf fünf funktionalen Prinzipien:

- ⇨ Eins-zu-eins-Zuordnung zwischen Objekt und Zahlsymbol, d.h. jedem Objekt wird genau ein Zahlwort zugeordnet = Prinzip der Eindeutigkeit
- ⇨ Stabile Reihenfolge der Zahlsymbol = Prinzip der stabilen Ordnung
- ⇨ Irrelevanz der Reihenfolge, in der die Objekte gezählt werden, d.h. man kann an jeder beliebigen Stelle in der Reihe zu zählen beginnen = Prinzip der Irrelevanz der Anordnung
- ⇨ Abstraktion des Zählvorganges, d.h. Generalisierung des Zählens auf alle Bereiche; beliebige Objekte = Prinzip der Abstraktion
- ⇨ Kardinalität, d.h. Mengengröße wird durch Zählen ermittelt und die zuletzt genannte Zahl des Zählvorganges determiniert die Anzahl der Elemente = Kardinalzahlprinzip

Die Bedeutung des Zählens wird im Kapitel 4 detaillierter betrachtet.

Als psychologisch orientierten Zugang zur Mathematikdidaktik spielen die Untersuchungen von Piaget und Szeminska (1965/1994) eine wichtige Rolle innerhalb der Diskussion um das Wesen der Zahl und die Zahlbegriffsentwicklung beim Kind. Es soll an dieser Stelle noch einmal unterstrichen werden, dass das Erkenntnisinteresse von Piaget auf die Entdeckung entwicklungspsychologischer und erkenntnistheoretischer Tatsachen gerichtet war; didaktisch-methodische Erwägungen spielten in seinen Überlegungen kaum bzw. erst in späteren Publikationen eine Rolle. Piaget zeigt mit seinen Unersuchungen lediglich, ob in einem bestimmten Entwicklungsalter ein Kind über bestimmte geistige Operationen verfügt oder nicht. Diese Übertragung bzw. Anwendung und somit auch Weiterentwicklung der psychologischen Erkenntnisse auf pädagogische Sachverhalte leistete vor allem Hans Aebli.

Trotz aller Kritik an Piagets Theorie, seinen Untersuchungsmethoden und der Interpretation seiner Ergebnisse ist durch seine Forschungsergebnisse der Streit zwischen den gegensätzlichen Positionen von ‚Anschauern und Zählern' bzw. zwischen Vertretern der Kardinalzahltheorie und der Ordinalzahltheorie weitgehend aufgehoben. Ausgehend von der theoretisch nicht nachweisbaren Priorität des kardinalen bzw. des ordinalen Aspektes einer Zahl versucht Piaget, sich empirisch dieser Frage zu stellen. Ein wichtiges Ergebnis seiner Untersuchungen ist, dass der Zahlbegriff als abstrakter Begriff eben erst dann vollständig entwickelt ist, wenn die Synthese beider Zahlaspekte erfolgt. Die Abstraktionen von den Handlungen der Seriation und der Klassifikation zusammen erst charakterisieren, dass ein Kind über den Zahlbegriff verfügt. Mit dieser Auffassung koppelte Piaget den logischen und mit dem psychologischen Zugang zum Zahlverständnis: „Die Hypothese, von der wir ausgegangen sind, ist selbstverständlich die, dass dieser Aufbau (des Zahlbegriffes – Anmerkung d. A.) mit der Entwicklung der Logik selbst in Korrelation steht und dass dem vorlogischen Niveau ein vornumerischer Zeitabschnitt entspricht. Und als Ergebnis zeigte sich, dass der Zahlbegriff sich tatsächlich Schritt für Schritt entwickelt, in enger Verbundenheit mit der stufenweisen Erarbeitung der Inklusions-Systeme (Hierarchie der logischen Klassen) und der asymmetrischen Relationen (Qualitative Serienbildung), wie die Zahlenfolge sich auf diese Weise als operatorische Synthese der Klassenbildung und der Reihenbildung entwickelt." (Piaget, 1965/1994, S. 10). (Eine prägnante und gut verständliche Einführung zur Entwicklungstheorie von Piaget findet sich in Moser-Opitz, 2001).

Wenngleich diese beiden Zahlaspekte das Wesen der Zahl charakterisieren, muss an dieser Stelle auf weitere Zahlaspekte hingewiesen werden. Innerhalb unserer kulturellen Entwicklung, im alltäglichen Gebrauch entwickelten sich unterschiedliche Bedeutungsaspekte einer Zahl. Diese sind gerade innerhalb unseres hochdifferenzierten und informationsbeladenen Alltages wichtig; Kinder sammeln und nutzen diese, dennoch sind sie nicht als kognitive Existenz des Zahlbegriffs zu verstehen. Die unter diesen Aspekten benutzten Zahlwörter sind kontextgebunden, abhängig von der individuellen Entwicklung und den Vorerfahrungen u.a. Dennoch spielen sie als individuelle Lernvoraussetzungen eine große Rolle. Gerade die Kinder in der Vor- und Grundschulzeit bedeutet der Umgang mit Zahlen ein Schritt in die Welt der Erwachsenen, in der Zahlwörter in unendlicher Vielzahl benutzt werden und häufig einen „objektiven" Eindruck vermitteln. Diese Vorerfahrungen der Kinder gilt es anzuerkennen und zu nutzen, indem der jeweilige Gebrauch im Hinblick auf den Kontext und die jeweiligen Zahlaspekte analysiert wird.

Folgende sechs Zahlaspekte werden heute unterschieden:

- Kardinalzahlaspekt: beschreibt die Mächtigkeit einer Menge, bezeichnet eine bestimmte Anzahl von Elementen innerhalb der Menge

- Ordinalzahlaspekt: Zählzahl, Ordnungs- oder Ordinalzahl; regelt die Vorgänger- und Nachfolgerbeziehung; mit ihrer Hilfe schreibt man in einer Reihe den Dingen einen bestimmten Platz zu
- Codierungsaspekt: ohne numerische oder arithmetische Bedeutung werden bestimmte Informationen mittels Zahlwörter und -symbolen verschlüsselt (Telefonnummern, TV-Kanäle, PIN-Nummer usw.)
- Operatoraspekt: das Vielfache eines Vorganges wird beschrieben („ich muss noch viermal schlafen; wir lesen den Text zweimal)
- Maßzahlaspekt: Zahl als Maßzahl für Größen, z.B. ¼ Liter; ½ Stunde, 7 Tage, 5 Jahre,
- Rechenaspekt: Zahl als Ergebnis von Verknüpfungsoperationen, z.B. ‚fünf und fünf sind zehn'

Zusammenfassung

Zahlen sind somit Abstraktionen der Koordination von Zuordnungs- und Vergleichshandlungen zu bestimmten Handlungssystemen (Damerow, 1993, S. 198). Der Zahlbegriff selbst bildet sich erst heraus, wenn die beiden grundlegenden geistigen Operationen Seriation (Reihenbildung) und Kardination (Klassifikation auf numerischer Ebene) auf Mengen angewendet werden, die durch die Qualität ihrer Elemente definiert werden. Aber erst die Abstraktion von diesen Qualitäten der Elemente, d.h. unabhängig davon welche physikalischen Eigenschaften wie Farbe, Form, Größe, Gewicht, Geruch, Geschmack diese Elemente haben und auch unabhängig davon, in welcher räumlichen Lage die einzelnen Elemente sich zueinander befinden, verwirklicht sich der Zahlbegriff als operatorische Synthese.

Die Zahl besteht aus einem System von Handlungen oder Operationen, die auf die Objekte ausgeübt werden, aber von deren speziellen Eigenschaften nicht abhängen. Der Zahlbegriff kann weit über Grenzen des Objektes und über Grenzen der Wahrnehmung hinaus gebildet werden. Er ist das Ergebnis einer fortschreitenden Koordination von Handlungen, ohne dass die Zahl als das Wesen der Objekte aufgefasst werden kann. Vereinigen/Klassenbilden und Ordnen/Reihenbilden sind keine speziellen, zahltypischen Handlungen, sondern Handlungen, die untereinander koordiniert werden, d.h. die aus der Koordination anderer Handlungen resultieren; diese Koordination braucht zunächst konkrete Objekte.

Die Zahl resultiert letztlich aus der Koordination der Handlung, nicht aus den speziellen Handlungen selbst, sondern als Produkt reflexiver Abstraktionen. Während Abstraktionen von einem konkreten Gegenstand zu physikalischen Begriffen wie Farbe, Form, Gewicht, Größe führt (empirische Abstraktion), ist die Abstraktion von der Handlung, von dem, was man mit den Gegenständen macht reflexiver Art, in dessen Ergebnis die Zahl gebildet wird.

Die Handlung des Zählens kann nicht durch die Objekte allein bestimmt werden; der Zahlbegriff wird nicht von den Objekten abstrahiert, sondern die Zahl wird den Objekten zugefügt. Die dem Zahlbegriff zugrundeliegenden Handlungen reduzieren sich auf Klassifizieren und Ordnen bzw. Reihenbilden.

2. Die Entwicklung des Zahlbegriffes und die Rolle des Zählens

Mathematisches Wissen und auch den Zahlbegriff erwirbt das Kind im Laufe seiner kognitiven Entwicklung und ist demnach ein Entwicklungsprozess. Dieser Prozess umfasst die ersten Lebensjahre und gilt mit dem Ende der Kindheit und der Jugendphase im Wesentlichen als abgeschlossen. Um diesen Entwicklungsprozess nachvollziehen zu können, werden hier zunächst einige Forschungsergebnisse allgemein zur kognitiven Entwicklung und danach speziell zur Zahlbegriffsentwicklung skizziert.

In sehr vielen humanwissenschaftlichen Fachdisziplinen setzt sich allmählich eine systemtheoretisch orientierte Sichtweise zu Fragen der kognitiven Entwicklung, des Lernens usw. durch. Neben pädagogischen, therapeutischen, klinischen, pflegerischen, beratenden Kontexten sind diese Auffassungen auch innerhalb der Entwicklungspathologie zu beobachten (Petermann & Niebank & Scheithauer, 2000). Die kindliche Entwicklung wird hier als ein „Prozess qualitativer Neuorganisation innerhalb und zwischen verschiedenen Systemen“ betrachtet (Petermann et.al., 2000, S. 17). Reziproke Veränderungen vielfältiger Faktoren auf unterschiedlichsten Ebenen stellen sowohl das Resultat als auch die Quelle weiterer Veränderungen dar. Zwischen Gen- und Umweltfaktoren kristallisieren sich im Gegensatz zu früheren Auffassungen keine additiven, sondern interaktive Beziehungen heraus. Bezüglich der Hirnentwicklung wurde herausgestellt, dass die funktionale Hirnentwicklung als eine differentielle Spezialisierung multipler, ko-aktiver kortikaler Bahnen zu verstehen ist, d.h. Hirnregionen sind bereits aktiv, noch bevor sie durch Spezialisierung einen zugeordnete Funktion einnehmen (Petermann et.al., 2000, S. 17 ff.). Dies unterstreicht noch einmal die Wechselbeziehung zwischen unseren sozialen Erfahrungen und der Entwicklung der Hirnstrukturen.

Nach Case (1999) entwickelt sich der Mensch in einem spontanen, kreativ-konstruktiven Prozess durch Problemlösen. Das Problemlösen selbst stellt sich abhängig von den Komponenten: Problemsituation, Ziele und Strategien in Form von Kontrollstrukturen dar. Diese Kontrollstrukturen setzen sich zusammen aus der Suche nach passenden Schemata (Denkplänen), deren Bewertung aufgrund früherer Erfahrungen, möglicher Umetikettierungen bzw. Konsolidierung (Case, 1999, Vorwort). Aus dieser Perspektive erhalten psychopathologische Phänomene eine veränderte Bedeutung; unter entwicklungsorientierter Sichtweise sind diese eben nicht mehr Anomalien, sondern Folge natürlicher Entwicklungsverläufe. Kategorisierungen wie z.B. ICD oder DSM erweisen sich gegenüber dieser Entwicklungsorientierung häufig als zu unsensibel (Petermann, et.al., 2000, S. 31).

Wesentliche Impulse für die Erklärung der kognitiven kindlichen Entwicklung gingen von den umfangreichen Untersuchungen Piagets (1896 – 1980) aus. Die von ihm herausgearbeitete Gesetzmäßigkeit, dass Entwicklung sich sequentiell vollzieht und jedes ihrer Stadien (senso-motorische, präoperationale, konkret-operationale und formal-logische) zum Aufbau der nächsten notwendig ist, ist allein als Erklärung für Lern- und Entwicklungsprozesse nicht ausreichend. Darüber hinaus benennt er noch drei grundlegende Entwicklungsfaktoren: die (biologische) Reifung, die Erfahrung der materiellen Umwelt und die Wirkung der sozialen Umwelt (Piaget, 1970, S. 86). Da die Reifung für sich genommen keine hinreichende Erklärung für Lernen ausmacht und die materielle und die soziale Umwelt die Entwicklungssequenzen allein nicht erklären können, benennt Piaget als weiteren koordinierenden Faktor die Äquilibration. Allein dieses Zusammenspiel individueller und das Individuum umgebender Faktoren mit nicht eindeutig vorhersagbaren und planbaren Entwicklungsverläufen, mit eindeutigen Ursache-Wirkungsmechanismen lässt Piagets Theorie i.w.S. als systemtheoretische charakterisieren.

Entsprechend seiner Definition der (natürlichen) Zahlen als Resultat „der Synthese von Ordnung (Reihenbildung) und Inklusion oder verschachtelter Mengen (Klassifikation), welche durch Abstraktion von Qualitäten notwendig sind“ (Piaget, 1970, S. 109) vollzieht sich die Entwicklung des Zahlbegriffes aus dem Aufbau der logischen Operationen der Klassen- und der Reihenbildung. „Das numerische Denken des Kindes wird also von seinen Vorstufen, dem Denken in Klassen und Relationen, und dieses wiederum aus gewissen, noch ungegliederten Vorläufern des anschaulichen Tuns hergeleitet“ (Aebli, 1964, S. 8).
Entsprechend seiner Stufen- bzw. Stadientheorie sowie dem Modell der Äquilibration über die Teilprozesse Akkomodation und Assimilation zur Beschreibung der kognitiven Entwicklung charakterisiert Piaget die Zahlbegriffentwicklung als hierarchische Entwicklung der beiden Operationen Seriation (d.h. Ordnung bzw. Reihenbildung) und Klassifikation. Da beide Operationen prinzipiell nicht ausschließlich numerischer bzw. mathematischer Art sind, sondern allgemein-menschliche geistige Operationen sind, steht die Entwicklung des Zahlbegriffs eng im Zusammenhang mit der Entwicklung der Logik: „Die Hypothese, von der wir ausgegangen sind, ist selbstverständlich die, dass dieser Aufbau (des Zahlbegriffes – Anmerkung d. A.) mit der Entwicklung der Logik selbst in Korrelation steht und dass dem vorlogischen Niveau ein vornumerischer Zeitabschnitt entspricht. Und als Ergebnis zeigt sich, dass der Zahlbegriff sich tatsächlich Schritt für Schritt entwickelt, in enger Verbundenheit mit der stufenweise Erarbeitung der Inklusionssysteme (Hierarchie der logischen Klassen) und der asymmetrischen Relationen (qualitative Serienbildung), wie die Zahlenfolge sich auf diese Weise als operatorische Synthese der Klassifizierung und der Reihenbildung entwickelt (Piaget, 1964, S. 10).
Zusammenfassend lässt sich konstatieren, dass das von Piaget charakterisierte operationale Denken zwar eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für den Zahlbegriff ist. Folgende Entwicklungsstadien, die letztlich in ihrer operatorischen Synthese zum Zahlbegriff führen, lassen sich in der Entwicklung unterscheiden:

1. globales Stadium (Einsichten sind abhängig von äußerer Wahrnehmung)
2. Erkenntnisse auf anschaulicher Ebene ohne dauerhaften Charakter; Übergangs-, Erarbeitungsphase (Entscheidungen sind gebunden an äußere Bedingungen, z.B. Aufgabenstellung seitens des Lehrers; Vorerfahrungen der Kinder; Beliebtheits- und Bekanntheitsgrad der Gegenstände und Handlungen)
3. operatorisches Stadium (Entscheidungen sind unabhängig von äußeren Formen/Wahrnehmungen)

Die Entwicklungsstadien lassen sich bei allen Elementen des Zahlbegriffes z.B. Reihenbildung; Klassifikation, Invarianz, Koordination zwischen Kardination und Ordination nachvollziehen.

Um den Zahlbegriff selbst aber bilden zu können, müssen die Kinder von einer Reihe von Merkmalen dieser konkreten Gegenstände und Handlungen abstrahieren. Piaget unterscheidet zwei Arten der Abstraktion: die empirische Abstraktion und die reflexive Abstraktion (1970). Im Prozess der empirischen oder dingliche Abstraktion sammeln wir Erfahrungen mit den Qualitäten der Gegenstände selbst, d.h. die Kinder lernen physikalische Eigenschaften wie Farben, Formen, Länge, Geschmack usw. Erst der Prozess der reflexiven Abstraktion, d.h. in der Abstraktion von der konkreten Handlung, der unmittelbaren Auseinandersetzung mit konkreten Gegenständen lässt Verallgemeinerungen auf höhere Ebene zu und bildet mathematisch-logische Erfahrungen. Die auf diese Weise gewonnenen Erfahrungen spiegeln nicht Eigenschaften der Gegenstände wider, sondern Erfahrungen der durchgeführten Handlung selbst, Erfahrungen, die durch die Handlungen selbst eingebracht werden. Erst durch diese reflexive Abstraktion, d.h. die Abstraktion von der konkreten Handlung mit beispielsweise Steinen, Perlen o.a. Gegenständen kommt das Kind zum Zahlbegriff. Der

Zahlbegriff muss als anschauliche Zuordnung erfahren werden, d.h. als umkehrbares System von Umstellungen und Beziehungen.

Diese Koordination von Seriation und Kardination lässt sich mit Hilfe des Treppenmodells recht gut veranschaulichen und diagnostizieren. Das Grundprinzip einer Treppe beinhaltete den engen sachstrukturellen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Steine (Höhe) der jeweiligen Stufe und seiner Stellung innerhalb der Treppe: so hat beispielsweise die dritte Stufe die Höhe drei einzelner Stufen und steht an dritter Stelle.

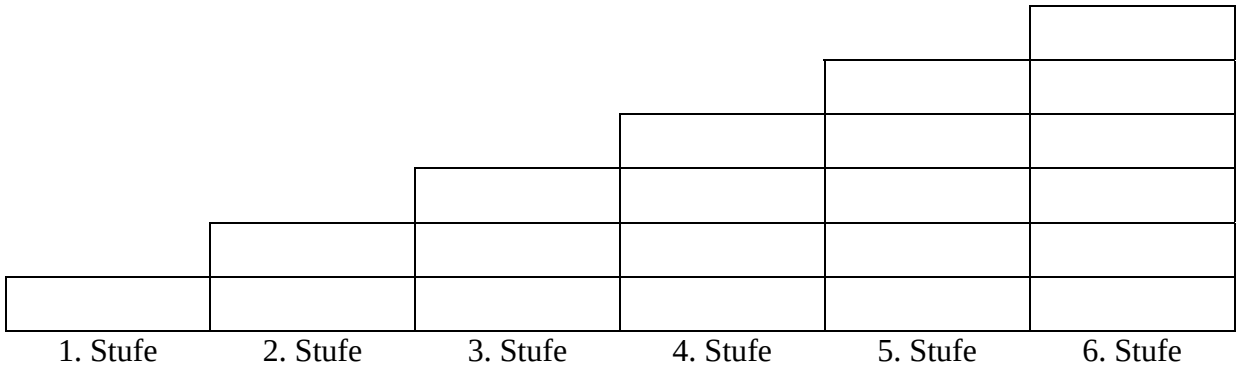

Abb. 1 Modell der Treppen als anschauliche Koordination zwischen Seriation und Kardination

Die Entwicklungstheorie von Piaget wurde sowohl als Gesamtkonzept als auch in einzelnen Teilen immer wieder kritisiert und revidiert. Zu diesen Kritiken zählen neben der generellen Kritik z.B. bezogen auf methodologische und wissenschaftstheoretische Grundpositionen, unklare sprachliche Anforderungen und auch die Unangemessenheit der Unersuchungssituation selbst (Moser-Opitz, 2001). Dennoch bestätigen nachfolgende Untersuchungen viele dieser grundlegenden Annahmen.

Untersuchungen allgemeiner Art zur kognitiven Entwicklung des Kindes stellen ebenfalls die Gleichsetzung von Strukturgenese und Konstruktionsprozess in Frage (Schröder, 1993). Drei Hauptprobleme werden hier markiert:

1. Die postulierten Entwicklungssequenzen treten nicht universell auf und ihre Abfolge folgt nicht immer in einer geordneten Sequenz.
2. Bei der Bewertung des Lösungsverhaltens der Kinder ist zu unterschieden zwischen dem Urteil und der Begründung. Urteilsstrukturen sind zeitlich relativ instabil bzw. nicht kumulativ. Begründungen dagegen entwickeln zu einem später als Begründungen, sind dann aber kognitiv vollständig durchdrungen.
3. Die kognitive Entwicklung geht nicht nur von der konstruktiven und explorativen Tätigkeit der Person aus, sondern hängt stark von den kontextuellen Faktoren, wie beispielsweise dem Material ab. Unterschiedliche Kontextsysteme stellen unterschiedliche intrinsische Bedingungen der Entwicklung dar.

Trotz allgemeingültiger Erklärungsprinzipien und Theorien zum Lernen, zur Entwicklung des mathematischen Wissens und auch des Zahlbegriffes, die im Folgenden genauer beschrieben werden, müssen wir davon ausgehen, dass die Kinder äußerst unterschiedliche Entwicklungs-

und Lernverläufe aufzeigen (van, de Rijt & von Luit & Hasemann, 2000; Fuson, 1988; Schröder, 1993; Petermann, et.al.; 2000 u.a.).

Kinder sammeln bezüglich des Zahlbegriffes von Geburt an vielfältige Erfahrungen sowohl numerischer als auch nicht numerischer Art. Dazu gehören Erfahrungen beispielsweise beim Aufräumen, Tisch decken, bei Spielen aller Art (Klatsch-, Reim-, Sing-, Abzähl-, Hüpfspiele u.a.). In all diesen Alltagssituationen machen Kinder Erfahrungen sowohl mit natürlichen Zahlen als auch mit benannten, Bruch-, und auch ganzen Zahlen (z.B. zwei Stunden, ¼ Liter; 3,50 €, -8 ^{o}C). Bei diesen pränumerischen Erfahrungen werden dem Kind Teilaspekte des Zahlbegriffes bewusst; diese stehen jedoch relativ zusammenhangslos nebeneinander; Beziehungen, Verknüpfungen untereinander werden -noch- nicht erkannt. All diese an soziale Situationen gekoppelten Erfahrungen enthalten in ihren Grundstrukturen grundlegende kognitive Operationen wie Seriation (eine Reihe, eine Ordnung herstellen) Klassifikation (Ordnungsmerkmale erkennen und anwenden), Invarianz (Gleichmächtigkeit bzw. Erhalt der Gesamtmenge trotz unterschiedlicher räumlicher Anordnungen und/oder unterschiedlicher Qualitäten der Elemente erkennen). Diese Operationen befähigen das Kind, den Zahlbegriff zu bilden.

Lernen erfolgt in „subjektiven Erfahrungsbereichen“ (Begemann, 1997). Für den Bereich der Mathematikdidaktik wurde dies bereits von Bauersfeld 1983 herausgestellt. Aufgrund zahlreicher Analysen von Mathematikunterricht kommt er zu dem Ergebnis, dass unsere menschlichen Erfahrungen in voneinander getrennten ‚Inhaltsbereichen’ i.S. bereichsspezifischer Gedächtniseinheiten gesammelt werden. Diese sind dann als „subjektiver Kontext für lokales Handeln aktivierbar“ und umschließen sowohl alle kognitiven als auch nicht-kognitiven Dimensionen des Handelns“ (Bauersfeld, 1983, S. 27). Aus diesen Überlegungen ergibt sich die Frage, welche kindlichen Alltagserfahrungen und –Handlungen zum Zahlbegriff bzw. zu numerischen und arithmetischen Einsichten führen? Probst und Waniek (2003) werfen in diesem Zusammenhang die interessante Frage auf, ob es nicht auch für das numerische Vorwissen im vorschulisch-familiären Erfahrungsraum spezifisch ungünstige Bedingungen geben kann? Analog zu Lernbedingungen im sprachlichen Bereich (phonologischen Bewusstheit) sprechen sie von einer „numerischen Bewusstheit“: „Numerische Bewusstheit sei verstanden als Einstellung aus Aufmerksamkeit und Kompetenz für quantitative Sachverhalte im Alltag“ wie Zuordnungen, Mengenvergleiche, Reihen bilden, Abzählen usw. (Probst & Waniek, 2003, S. 71). Inwieweit die einzelnen Faktoren Einfluss auf die Zahlbegriffsentwicklung hat, lässt sich derzeit nicht genau sagen. Zumindest ist aber diesen individuellen Vorerfahrungen als Lernausgangslage genügend Raum im Mathematikunterricht einzuräumen.

Dennoch bestätigen auch neuere Untersuchungen eine generelle, stufenweise Entwicklungsabfolge im Kindesalter (Petermann, et.al, 2000; Case, 1999). Obwohl Case prinzipiell die kognitive Entwicklung als stufenweisen Prozess ansieht, wird stärker zwischen der generellen und spezifischen Entwicklung differenziert. Jede individuelle Entwicklung ist demnach nicht genereller, sondern spezifischer Natur. Jede kognitive Struktur bildet sich in Abhängigkeit vom jeweiligen Kontext des Problemlösens als abhängig von seiner vorherigen Lebensgeschichte (Case, 1999, Vorwort) daraus ergeben sich inter- als auch intraindividuelle Differenzen. Die inhaltliche Entwicklung ist demnach bereichs- und gebietsspezifisch. Dennoch werden die Stufen der Entwicklung als auch die Stufenübergänge sowie deren zeitlicher Verlauf als grundlegend und generell angesehen.

Einen Überblick über die generellen Entwicklungsetappen mathematisch relevanter Begriffe (Zahl-, Raum- und Zeitbegriffe) mit den grundlegenden geistigen Operationen (Seriation und Klassifikation) gibt die nachfolgende Tabelle:

Tab. 2: Überblick über die Entwicklungsetappen mathematisch relevanter Begriffe (Zahl, Raum und Zeit)

Lebensalter	**Zahlbegriff**	**Raumbegriff**	**Zeitbegriff**
0. – 2.	Senso-motorische Erfahrungen	Toplogische Qualitäten; Bewegung im Raum	Unbewusste Raum-Zeit-Erfahrungen; Zeit an unmittelbare Aktion gebunden
2. – 5.	Einfache Klassifikation und Seriation	Einfache Euklidische Beziehungen; Entwicklung mentaler statischer Bilder	Ordnung zwischen Raum und Zeit gebunden an einzelne Handlung; Zeit als lineares Geschehen; Einfaches Verständnis für zeitliche Sukzession, Dauer und einfache Seriation,
6./7.	Multiple Seriation oder Kardination	Einfache projektive Beziehungen; Bilder können manipuliert werden	Herstellen zeitlicher Reihenfolgen aufgrund von Erinnerungen
8./9.	Kardinalzahl oder Multiple Seriation	Komplexe euklidische Beziehungen	Herstellen zeitlicher Reihenfolgen als strategische, gedächtnisunabhängige Leistung
Ab 10.	Multiple Klassifikation oder Ordinalzahl	Multiple projektive Beziehungen	Operationaler und reversibler Raum- und Zeitbegriff

Eine breit angelegte Untersuchung zur Entwicklung des Zahlbegriffes legte Voigt (1983) vor. Innerhalb seiner Längsschnittsstudie mit 105 Kindern im Alter von 5 – 7 Jahren mit Aufgaben aus dem Bereich der Kardination (einschließlich konkreter Mengenvergleich durch Zählen und Korrespondenz), der Ordination, der Klassifikation und des Zahlbegriffs wurden folgende entwicklungsrelevante Aspekte festgestellt:
Alle Aufgaben zum Mengenvergleich über Zählen und Korrespondenz werden im 5. Lebensjahr weitgehend beherrscht. Dabei greifen die Kinder auf flexible, sehr individuelle Strategien zurück. Die Mengenvergleiche gehen der Zahlinvarianz voraus. Als Strategie benutzen die Kinder kardinale Vergleiche, d.h. über das Auszählen der einzelnen Teilmengen als Fertigkeit werden die Unterschiede bzw. die Gleichheit der Mengen ermittelt. Das Abzählen hat hier eine vermittelnde Funktion, die Funktion eines „repräsentationalen Verhaltens“ (Voigt, 1983, S. 291) für das Wissen über Zahlen selbst. Im Gegensatz zu Piaget, der das Zählen als nichtnumerische, nichtquantitative Strategie beschreibt, gehen Voigt u.a. davon aus, dass das Zählen selbst schon eine Kategorie ‚zählbarer Einheiten’ voraussetzt, d.h. Zählen setzt ein begriffliches Verständnis auf elementarster Ebene voraus (Voigt, 1983, S. 292). Zahlinvarianz und das abstrakte Konzept der Kardination entwickeln sich scheinbar parallel (375). Ein eindeutiges Ergebnis für die Rangfolge von Ordination, Kardination und Zahlinvarianz lässt sich nicht ableiten (Voigt, 1983, S. 375). Bezüglich der

Mengenvergleichsaufgaben (fünf unterschiedliche Versuchanordnungen zum kardinalen Vergleich) lassen sich nach Voigt (1983) folgende Entwicklungsabstufungen nachzeichnen:
1. Nichtäquivalenz durch Korrespondenz auf der Grundlage reiner Wahrnehmung
2. räumliche Korrespondenz (wird nahezu von allen 6-jährigen Kindern beherrscht)
3. Äquivalenz durch Zuordnung (wird ab dem 7. Lebensjahr von ca. 50 % der Kinder gelöst)

Seine Ergebnisse unterstreichen die Bedeutung der konkreten Versuchsanordnung. Abhängig von der Fragstellung, dem Untersuchungskontext, dem Bekanntheitsgrad der verwendeten Materialien lassen sich unterschiedliche Entwicklungsverläufe beobachten: „bei der Wahl strengerer Aufgabenkriterien – nämlich einer angemessenen Erklärung der Lösungsstrategie in den Ordinationsaufgaben – verschwindet der Entwicklungsunterschied zwischen Zahlinvarianz und den beiden Ordinationsaufgaben. Bei der Wahl konservativerer Aufgabenkriterien sprechen die Untersuchungsergebnisse demnach für eine parallele Entwicklung von Seriation, Transitivitätsaufgaben und Zahlinvarianz (Voigt, 1983, S. 242). Alle Teilergebnisse legen die Hypothese nahe, dass ein funktionaler Zusammenhang zwischen den konkreten numerischen Fertigkeiten und der Zahlinvarianz besteht. Dabei zeigt sich, dass die Entwicklungsabfolge von Ordination und Zahlinvarianz von den gewählten Aufgabenkriterien abhängt. Für einfachere Aufgaben zur Ordination bzw. weniger strenge Bewertung der Leistung findet sich eine zeitliche Priorität des Konzeptes der Ordination: für schwierigere Aufgabenstellungen beobachtete er eine parallele Entwicklung zwischen Zahlinvarianz und Ordination. Außerdem findet sich eine zeitliche Priorität von Piagets Seriationsaufgaben gegenüber der Zahlinvarianz, jedoch keine eindeutig interpretierbare Entwicklungsbeziehung zwischen Transitivitätsaufgaben und Zahlinvarianz. Für den Zusammenhang zwischen den konkreten numerischen Fertigkeiten und dem Wissen im Umgang mit Zahlen für die Konstruktion des Zahlbegriffes wurde eine qualitative Abstufung des Zahlwissens beschrieben (Voigt, 1983, S. 374 f.).

Auch spätere Untersuchungen revidieren die Homogenität der einzelnen Stufen und stellen eine veränderte Entwicklungsabfolge fest (zur Oeveste, 1987; Brainerd, 1979; Wember, 1986).
Die wesentlichen Ergebnisse sind folgende:

- Die Ordination entwickelt sich vor der Kardination.
- Ordinalzahlaspekte werden früher erworben als einfache Formen der Addition und Subtraktion.
- Kinder können Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 10 lösen, bevor sie die Kardination verstehen.
- Bei einem Training des Kardinal- und des Ordinalzahlaspekt bewirkt das ordinale Training einen größeren Zuwachs in den arithmetischen Fertigkeiten (Moser-Opitz, 2001, S. 58)

Zur Bedeutung des Zählens

Eng mit der Zahlbegriffsentwicklung verbunden ist die Handlung des Zählens. Dieser scheinbar so einfache Vollzug einer Handlung beinhaltete eine Vielzahl unterschiedlicher unterrichtsrelevanter Aspekte, die hier kurz diskutiert werden sollen.

Bei Piaget ist die Zahlwortreihe bzw. -sequenz bzw. die Handlung des Zählens selbst eine vernachlässigte Größe. Die Handlung des Zählens besitzt seiner Meinung nach vor der Existenz des Zahlbegriffs noch keinen operativen Charakter, da sie nicht gegenstands- und situationsunabhängig, nicht universell und nicht reversibel ist. Kinder erwerben den Zahlbegriff erst, wenn ihr Denken die konkret-operationale Stufe erreicht hat. Das

synthetische Zusammendenken von Klassifikation und Ordnungsrelationen gelingt auf früheren Entwicklungsstufen nicht. Damit überhaupt sinnvoll mit Zahlen gearbeitet werden kann, müssen alle notwendigen logischen Operationen auf der konkret-operationalen Stufe vollzogen werden können. Darüber hinaus ist die Invarianz – als Qualitätseigenschaft jeden Denkprozesses – von grundlegender Voraussetzung für den Zahlbegriff. Die Entwicklungsverläufe des Kardinal- und Ordinalzahlaspektes verlaufen laut Piaget identisch, d.h. die jeweiligen geistigen Operationen verlaufen immer auf ein- und derselben Entwicklungsstufe. Die von Piaget beschriebenen Entwicklungsstufen verstehen sich als homogenes Gesamtkonzept, dass das Denken des Kindes sich entweder generell auf der einen oder der anderen Stufe abläuft. In der präoperativen Phase haben die Kinder noch kein Bewusstsein dafür, dass beim Zählen immer die gleiche Zahl heraus kommen soll. Das Zählen hat in dieser Phase noch keinen arithmetischen Sinn, sondern ist lediglich eine Abzählhandlung.

Neuere Untersuchungen relativieren diese Aussagen und messen dem Zählen grundlegende Bedeutung beim Erwerb des Zahlbegriffs sowie beim Erlernen einfacher Additions- und Subtraktionsaufgaben bei. Die Zahlwortsequenz dient als ‚Werkzeug zur Repräsentation' (Fuson, 1981, in Voigt, 1983). Das Verständnis des Kindes für die inneren Ordnungsbeziehungen innerhalb der Zahlwortreihe (der natürlichen Zahlen) lässt sich durch folgende, aufeinanderfolgende Niveaus abbilden:

1. *Ganzheitsauffassung der Zahlwortreihe*: Die Zahlwortreihe wird als undirektionale Ganzheit aufgefasst und wie ein Lied, ein Gedicht rezitiert. Die Zahlwörter werden dabei z.T. noch nicht voneinander unterschieden. Die Elemente werden nicht gezählt und die Zahlwörter haben keine kardinale Bedeutung.
2. *Unflexible Zahlwortreihe*: Die Zahlwörter werden als Einheit aufgefasst. Die Kinder können die Zahlwortreihe aufsagen, müssen aber immer wieder bei eins anfangen, eine beliebige Zahl kann nicht als Ausgangspunkt genutzt werden. Vorgänger und Nachfolger können nur benannt werden, indem das Kind sie innerhalb der Zahlreihe zu bestimmen versucht. Eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz zwischen Zahlwort und Element kann hergestellt werden. Die Kinder können durch Zählen eine bestimmt Anzahl Elemente bestimmen, z.B. „gib mir drei".
3. *Teilweise flexible Zahlwortreihe*: die Zahlwortreihe kann von einem beliebigen Zahlwort aus aufgesagt, Vorgänger und Nachfolger unverzüglich benannt werden. Rückwärtszählen gelingt nur zum Teil.
4. *Flexible Zahlwortreihe*: jedes Zahlwort wird als Einheit betrachtet. Von jeder Zahl aus kann eine bestimmte Anzahl von Schritten weiter gezählt werden: „zähle von 14 aus drei Schritte weiter"
5. *Vollständig reversible Zahlwortreihe*: es kann von jeder zahl aus vorwärts- und rückwärts gezählt werden. Richtungswechsel erfolgen schnell und ohne Schwierigkeiten; Vorgänger und Nachfolger einer Zahl können unverzüglich benannt werden (Fuson, 1988, S. 33 in: Moser-Opitz, 2001, S. 86)

Fuson und Richards (1979) stellten heraus, dass Kinder im Alter von 6 Jahren die Zahlenreihe vorwärts und rückwärts auf der Vorstellungsebene durchlaufen können.

Bezüglich der Zählkompetenzen lassen sich für Schulanfänger folgende Fähigkeiten benennen (Schmidt, 2003, S. 32):

- Mindestens bis 10 (15 bzw. 20) können 96,8 % (84,3 % bzw. 70 %) können die Schüler die Zahlwortreihe aufsagen.

- 78 % der Kinder können alle 10 Ziffern lesen; 89,2 % noch acht Ziffern. Ca. 1/3 der Kinder kann auch zweistellige Zahlen korrekt lesen.
- Beim Ziffernschreiben treten häufig Spiegelverkehrungen auf; bei zweistelligen Zahlen werden häufig Einer und Zehner verwechselt.

Stern (1998b) ermittelte im Rahmen der LOGIK-Studie folgende themenrelevante Fähigkeiten der Kinder:

1. Bezüglich der Zahlinvarianz beantworteten 10 % der Kinder im Alter von 3-4 Jahren die Fragen korrekt; im Alter von 5 – 6 Jahren bereits die Hälfte.
2. Mit der Quantifizierungsaufgabe (für acht zufällig angeordnete Holzklötze sollte die Anzahl angegeben werden, ohne zu zählen) konnten in der Gruppe der 5 – 6 Jährigen lediglich eine Menge bis 4; 30 % der Kinder acht Holzklötze ermitteln.
3. Bereits im Vorschulalter (zwischen dem 3. und 4. Lebensjahr) können Kinder kleinerer Mengen korrekt zählen. Die Quantifizierung spielt bei der Verarbeitung von Informationen noch eine untergeordnete Rolle, andere Dimensionen wie die Qualität der Gegenstände und deren räumliche Anordnung haben eine größere Priorität (Stern, 1998b, S. 100 f.).
4. Die in Kapitel 6.3.1.1 benannten Zählprinzipien berücksichtigen Kinder etwa ab dem 4. Lebensjahr (Stern, 1998a, S. 55)

Mit diesen Ergebnissen bekommt das Zählen im Mathematikunterricht eine andere Bedeutung. Den Zählfähigkeiten der Schüler i.S. individueller Fähigkeiten und Fertigkeiten ist größere Aufmerksamkeit zu schenken, Zählübungen sind verstärkt in den Unterricht einzubinden. Es ist aber zu beachten, dass diese Zählfähigkeiten nicht den operatorischen Charakter der Zahl ersetzen, sondern vor allem den Zusammenhang zwischen der elementaren Stück-für-Stück-Zuordnung und den entsprechenden Begriffen (Zahlennamen) und Zeichen/Ziffernsymbolen thematisieren (Wember, 1989, S. 439). Dieser scheinbare Widerspruch lässt sich vermutlich durch den synonymern Gebrauch von Kompetenz und Performanz der Zahl erklären: durch das Erlernen rechnerischer Fähigkeiten entwickeln sich zahlrelevante kognitiver Strukturen. D.h. es wird immer Kinder geben, die auch ohne Zahlinvarianz das Rechnen erlernen, es bleibt jedoch offen, inwieweit dieses Rechnen operativ abgesichert, beweglich und ausbaufähig ist.

Zur Oeveste (1987) skizziert aufgrund seiner Untersuchungen, angelehnt an den Piagetschen Anforderungen zwei mögliche Abfolgen für die Zahlbegriffsentwicklung:

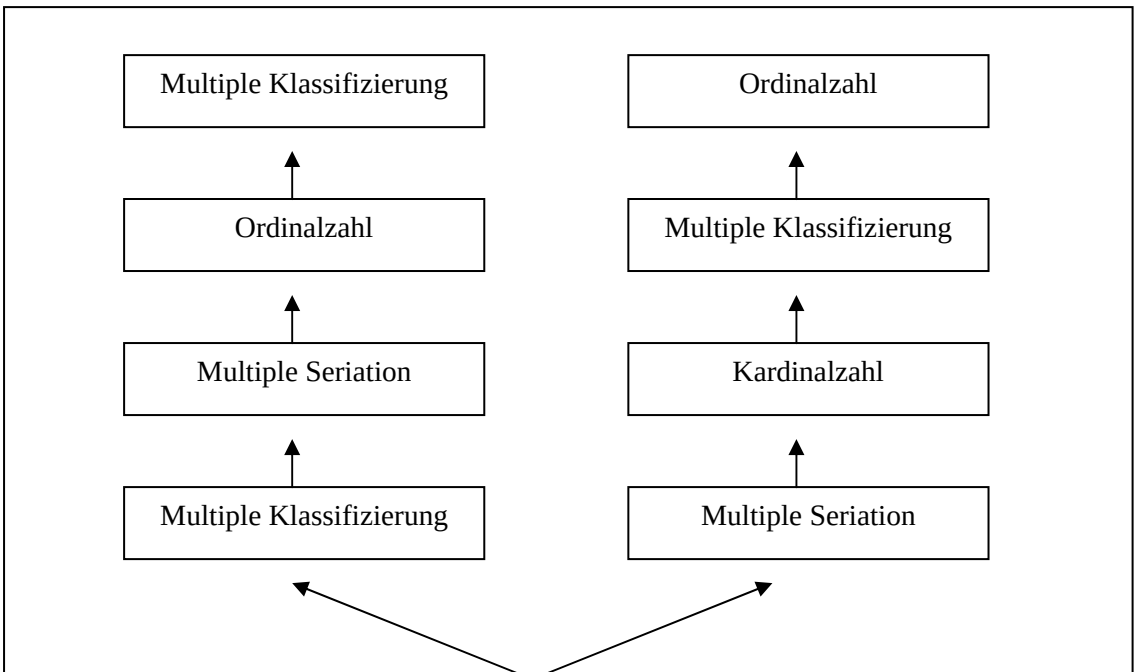

Abb. 2 Entwicklungszusammenhang zwischen den logischen Operationen und dem Zahlkonzept nach zur Oeveste (1987) (in Moser-Opitz, 2001, 58)

Eine der wenigen Untersuchungen zur Zahlbegriffsentwicklung bei Schülern an Förderschulen (Lernbehindertenschulen) legten Schulz und Bebber und Moog (1998) vor. Mit Hilfe ihres Förder- und Diagnoseprogramms Dort-E (vgl. auch Kapitel 6.3.1.3) stellten sie bei Schülern der zweiten und dritten Klasse einer Förderschule (n = 41) folgende Fähigkeiten und Fertigkeiten heraus:

- Das Vorwärtszählen (bis 15) wurde von allen Schülern fehlerfrei beherrscht.
- Beim Rückwärtszählen (ab 10) blieben 76 % aller Probanden fehlerlos, alle anderen ließen Zahlen aus oder wechselten die Zählrichtung.
- Rückwärtszählen von verschiedenen Startzahlen wurde von 73 % aller Schüler ohne Fehler bewältigt.
- Die Mächtigkeitsbestimmung beim Elemente Zählen wurde von keinem Probanden fehlerfrei bearbeitet.
- Die Menge-Zahl-Zuordnung beherrschten 66 % aller Schüler fehlerfrei.
- Die Bennennung der Vorläufer- und Nachfolgerzahlen wurde von 61 % aller Schüler fehlerfrei bewältigt.
- Die Bestimmung der Zahllücken erwies sich für 59 % aller Schüler als problemlos.
- Der Mächtigkeitsvergleich zweier Mengen wurde nur von ca. 27 % aller Schüler fehlerfrei bewältigt.
- Die Seriation der Mengenkarten wurde von 54 % aller Schüler ohne Fehler bewältigt.
- Das Bestimmen der größeren bzw. kleineren zweiter verbal vorgegebener Zahlen bereitete 63 % keine Probleme (Schulz et al., 1998).

Zusammenfassung

Für die kognitive Konstruktion des Zahlbegriffes sind der Kardinal- und der Ordinalzahlaspekt wesentlich; das Spektrum der Zahl selbst aber umfasst weitere alltagsrelevante Aspekte wie den Maßzahl-, Operator-, Codierungsaspekt, die im Unterricht zu berücksichtigen sind.

Kinder verfügen über äußerst unterschiedliche Vorerfahrungen mit Zahlen und numerischen Kenntnissen. Sie operieren auch mit Zahlen, lösen Aufgaben, auch wenn sie über die logischen Operationen noch nicht verfügen. Diese Vorerfahrungen sind kontextbezogen und

als individuelle Lernvoraussetzungen, als bereichspezifisches Wissen der Kinder zu verstehen und im Unterricht aufzugreifen.

Einfache Klassifikation, Seriation und Mengenvergleiche mittels Stück-für-Stück-Zuordnung entwickeln sich in früher Kindheit und bilden die Grundlage für die Einsichten und die Ordination und Kardination und deren Synthese als Ausdruck des Zahlbegriffes.
Abhängig vom Kontext der Aufgabenstellung lösen die Kinder Ordinalzahlaufgaben früher als kardinale.

Die Ordinalzahl als Zählzahl ist für die Bildung des Zahlbegriffes entscheidender als die Anzahl. Zählen i.S. einer kompetenten Strategie hat somit große Bedeutung für den Aufbau des Zahlbegriffes und den Erwerb arithmetischer Strukturen. Für ein weiterführendes, flexibles Rechnen aber, birgt das rein zählende Rechnen Probleme. Die Zählmethode zeigt nur Anfangserfolge und kurzzeitige Lernvorsprünge. Für ein weiterführendes, flexibles Rechnen z.B. bei Platzhalteraufgaben, Ableiten des Zahloperationen aus Textaufgaben, Aufbau des dekadischen Positionssystems mit Bündelungsstrukturen sind darüber hinaus simultane, kardinale Vorstellungen sowie Zerlegungen in Teilmengen notwendig (Probst & Waniek, 2003, S. 74).

Das Zählen selbst führt nicht zu Mengen- und Mächtigkeitsvorstellungen und begünstigt daher die für große Zahlenräume uneffektive Strategie des zählenden Rechnens bzw. Fingerrechens. Erst wenn das Abzählen durch die Notwendigkeit sorgfältig zu zählen auch eine kardinale Zuordnung erfährt und „effektives“ Zählen i.S. der Herstellung erster Teilmengen beinhaltet z.B. die Teilmengen bis 5 anhand der Finger simultan zu erfassen und als numerische Einheit zu nutzen, kann das zählende Rechnen als erweiterbare Strategie genutzt werden.

Zählen stellt eine wichtige Fähigkeit und Tätigkeit dar, die auch im Anfangsunterricht immer wieder geübt und angewandt werden muss. Diese Aufgaben müssen jedoch mit vielfältigen Übungen zum Ordnen, Vergleichen, Gliedern von Anzahlen/Mengen verknüpft werden, um ein ausschließlich abzählendes Rechnen zu vermeiden (Lorenz & Radatz, 1993).

Der rechnerische Umgang mit Zahlen kann die Zahlbegriffsbildung fördern und unterstützen, d.h. im Unterricht ist das Zahlenrechnen auch ohne abgeschlossene Zahlbegriffsentwicklung sinnvoll (Wember, 2003, S. 62).

3. Diagnostik und Intervention

Alle referierten Untersuchungsergebnisse sprechen für einen entwicklungsorientierten Zugang sowohl bei diagnostischen Fragen als auch bei der Anbahnung und Förderung des Zahlbegriffs beim Kind. Sämtliche Entscheidungen dieser Art sind entwicklungsorientierten Aspekte zu- und unterzuordnen, nach Entwicklungskriterien auszuwählen.

Eine Diagnose und die Förderung des Zahlbegriffes sollte nicht erst beim Schuleintritt thematisiert, sondern bereits im Kindergarten- bzw. Vorschulalter aufgegriffen werden. Die zahlreichen Untersuchungen der letzten Jahre machen deutlich, dass die Kinder äußerst unterschiedliches Vorwissen mitbringen. Dieses Vorwissen gilt es zu nutzen und auf Anknüpfungspunkte, Ansatzpunkte für die Entwicklung des Zahlbegriffes zu diagnostizieren.

Für den hier zugrundegelegten Zahlbegriff sind demnach die Teilbereiche Klassifikation/Kardination (als numerische Klassifikation), Seriation, Zählstrategien und Invarianz zu diagnostizieren und zu fördern.

Nachfolgend werden - in chronologischer Reihenfolge – fünf verschiedene Verfahren zur Diagnose und Förderung des Zahlbegriffes skizziert. Trotz aller Unterschiedlichkeit favorisieren alle Verfahren einen entwicklungsorientierter Zugang und sind somit förderdiagnostisch orientiert. Die Ergebnisse aus diesen Untersuchungen sollen eine entwicklungsorientierte, individuelle Lernstandsermittlung und Lernbegleitung ermöglichen. Diese Verfahren bieten zahlreiche Anhaltspunkte für für die eine individuelle, lernbegleitende Diagnose und Förderung des Zahlbegriffs. Eingebunden in Alltagssituationen und alterstypische, alltagsrelevante Materialien können diese Aufgabenstellung gleichzeitig auch Fördersituationen kennzeichnen.

Tab. 3: Überblick über Verfahren zur Diagnose und Förderung des Zahlbegriffs

Verfahren	**Klassifikation**	**Kardination**	**Ordination**	**Invarianz**	**Abstraktionsebenen**
Voigt (1983)	X	X	X	X	Konkret-handelnd; bildlich
Kutzer & Probst (o.J.)	X	X	X	X	Konkret-handelnd; bildlich
König & Ebert (2001)	X	X	X	X	Konkret-handelnd; bildlich, symbolisch (Zahlkarten)
Moog & Schulz (1999)	X	X	X	X	Konkret-handelnd; bildlich, symbolisch (Zahlkarten)
OTZ (2001)	X	X	X	X	Bildlich, symbolisch

Eine sehr differenzierte Untersuchung zur Zahlbegriffsentwicklung im Vorschulalter legte **Voigt (1983)** vor. Um mögliche charakteristische Entwicklungslinien herauszufinden, untersuchte er bei Kindern im Alter zwischen 5 und 7 Jahren in einer Längsschnittsstudie folgende Teilbereiche (vgl. Kapitel 6.1.3.2.):
Kardinationsaufgaben: Nichtäquivalenz zweier Mengen durch Zählen; Äquivalenz durch Zählen; Nichtäquivalenz durch Korrespondenz; Äquivalenz durch Korrespondenz, räumliche Korrespondenz; Kardinationsaufgabe mit Stäbchen
Invarianzaufgaben: Zahlinvarianz, Identitätsinvarianz
Klassifikationsaufgaben: Zuordnung mit geometrischen Formen, qualitative Korrespondenz, Dichotomisierung (Gruppen- bzw. Klassenbildung)
Ordinationsaufgaben: Transitivität (Länge und Gewicht); Einfügen von Stäben in ein Muster (Stabaufgaben), traditionelle Seriationsaufgaben, Treppenaufgaben, Seriation der Zahlen.

Mit Hilfe der **strukturbezogenen Aufgaben zur Prüfung mathematischer Einsichten von Kutzer und Probst (o.J.)** werden der aktuelle Lernstand bzw. die individuellen Lernvoraussetzungen des Kindes ermittelt. Anhand dieses Einzeltests lassen sich die mathematischen Einsichten, angefangen von der Unterscheidung der Eigenschaften von

Objekten bis hin zur Zahlbegriffsentwicklung/Zahlenoperation im Zahlenbereich bis 10 erfassen.

Der Test ist konzipiert für:
- Kinder in der Vorschule und Kindergarten bis zur Grundschule 1./2. Klasse
- Kinder der Lernbehindertenschule von der 1. bis zur 4. Klassenstufe
- Entwicklungsrückständige Kinder ab der Altersstufe 6
- Feststellung der Lernvoraussetzungen bei Schulanfängern

Die strukturbezogenen Aufgaben umfassen zwölf Basisaufgaben mit ansteigender Komplexität. Begleitend zur Testdurchführung wird ein Protokoll angefertigt, anhand dessen eine Bestandsaufnahme der (prä-)numerischen Kenntniselemente ohne quantifizierende Testwerte erfolgt. Eine Bezugsgruppennormierung liegt nicht vor, da mit Hilfe des Tests der individuelle Lernstand des Schülers und mögliche Fördermaßnahmen festgestellt werden soll.

Für den pränumerischen Bereich und den Bereich der Zahlbegriffsentwicklung sind folgende Basisaufgaben vorgesehen:

1. Gegenstände und ihre Eigenschaften
2. Mengen als Zusammenfassungen von Gegenständen bestimmter Eigenschaften
3. Voraussetzungen der Beurteilung der Mächtigkeit und Mächtigkeitsrelationen von Mengen

3.1 Herstellen von Stück – für – Stück – Zuordnungen
3.2 Invarianz
3.3 Repräsentanz
3.4 Klassifikation
3.5 Seriation

4. Mengen und Zahlen
5. Mengen und Zahloperationen

5.1 Mengenoperationen
5.2 Mengenoperationen – Zahlenoperationen
5.3 Zahloperationen

Jeder untersuchte Bereich wird durch die Einschätzung ‚erfüllt – nicht erfüllt' beschrieben. Die Ergebnisse dieser stark entwicklungspsychologisch orientierten Konzeption gehen über Aussagen bezüglich rein schulischer, rechnerischer Fertigkeiten des Kindes hinaus. Sie erfassen wesentliche entwicklungspsychologisch notwendige (aber nicht hinreichende) Einsichten für den Erwerb mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten. Mit Hilfe der Testergebnisse ist eine Einordnung der Schülerleistung entsprechend des zugrunde gelegten Entwicklungsmodells mathematischen Denkens möglich, eindeutige Aussagen zu den tatsächlichen individuellen Lösungsstrategien jedoch nicht. Die Resultate der Überprüfung geben durch die Kombination mit dem Mathematikbuch „Mathematik entdecken und verstehen" (Klett 1983) konkrete Hinweise zur weiteren Arbeit mit dem Schüler. Die thematische Abfolge orientiert sich jedoch ausschließlich an der Sachstruktur des Gegenstandes. Vorerfahrungen der Schüler aus anderen Bereichen, eventuell Kenntnisse z.B. im größeren Zahlenraum bzw. im Umgang mit multiplikativen Rechenverfahren, wie sie im Alltag häufig verwendet werden, finden keinerlei Berücksichtigung.

Zu empfehlen sind aus dieser Konzeption Übungsvarianten, die vor allem die Zahl als Beziehungsbegriff aufgreifen. Die Zahl wird definiert über das Zusammenspiel der Elemente: Klassenbegriff (Zahlennamen, Repräsentanz und Invarianz, Zuordnungen, Eigenschaften) und

dem Beziehungsaspekt selbst (Reihenbildung und Inklusion/Teilmengenbildung). Diese Beziehungsverflechtung soll die Synthese der beiden Operationen Seriation und Klassifikation provozieren, z.B. über Alltagssituationen wie Dosen werfen, Kegelspiel, Kerzen auspusten, Dominosteine als Kettenreaktion umwerfen u.a. All diese Alltagssituationen beinhalten die Menge als Ganzheit und deren Zerlegung in unterschiedliche Teilmengen. Einerseits unterstützt dieses die Einsicht in die Invarianz, andererseits lassen sich Teilmengenzerlegung als reversibles Geschehen mathematisch durch jeweils zwei Additions- und zwei Subtraktionsaufgaben beschreiben.

In Anlehnung an den Zahlbegriff nach Kutzer (1985) thematisieren **König und Ebert (2001)** in einem qualitativen Prüfverfahren vor allem die drei Bereiche: Reihenbildung (Zeitabfolgen erkennen, Zählfähigkeiten: Abzählen, Weiterzählen, Rückwärts zählen, In-Schritten-Zählen), Mengenvergleiche (Stück-für-Stück-Zuordnung, Invarianz) und Gruppenbildung (Raumlage erkennen, Kategorien bilden, Klassifikation nach Anzahl, Teil-Ganzes-Beziehung). „Bei der Zahlbegriffsentwicklung handelt es sich um eine komplexe Oberbegriffsbildung. Um mit Zahlen einsichtsvoll operieren zu können, müssen vielschichtige Einsichten aus dem Bereich der Reihen- und Gruppenbildung sowie den Mengenvergleichen miteinander verknüpft und auf unterschiedliche Sachbezüge übertragen werden“ (König & Ebert, 2001; o.S.) Die Teilbereiche werden in unterschiedlichen Alltagsbezügen, auf unterschiedlichen Abstraktionsniveaus und in unterschiedlichen sachstrukturellen Komplexitätsanforderungen angeboten. Aufgrund der äußerst unterschiedlichen Lernvoraussetzungen der Schüler wird nicht von einem hierarchischen Ablauf in den einzelnen Bereichen ausgegangen, sondern in einer individuell bedingten Verzahnung zwischen Niveau und Komplexität. Mit Hilfe eines so verstanden Sachstrukturgitters wird angestrebt, die aktuelle Leistung des Schülers festzulegen und die nächstmöglichen Lern- und Entwicklungsschritte abzuleiten und didaktisch-methodisch vorzubereiten.

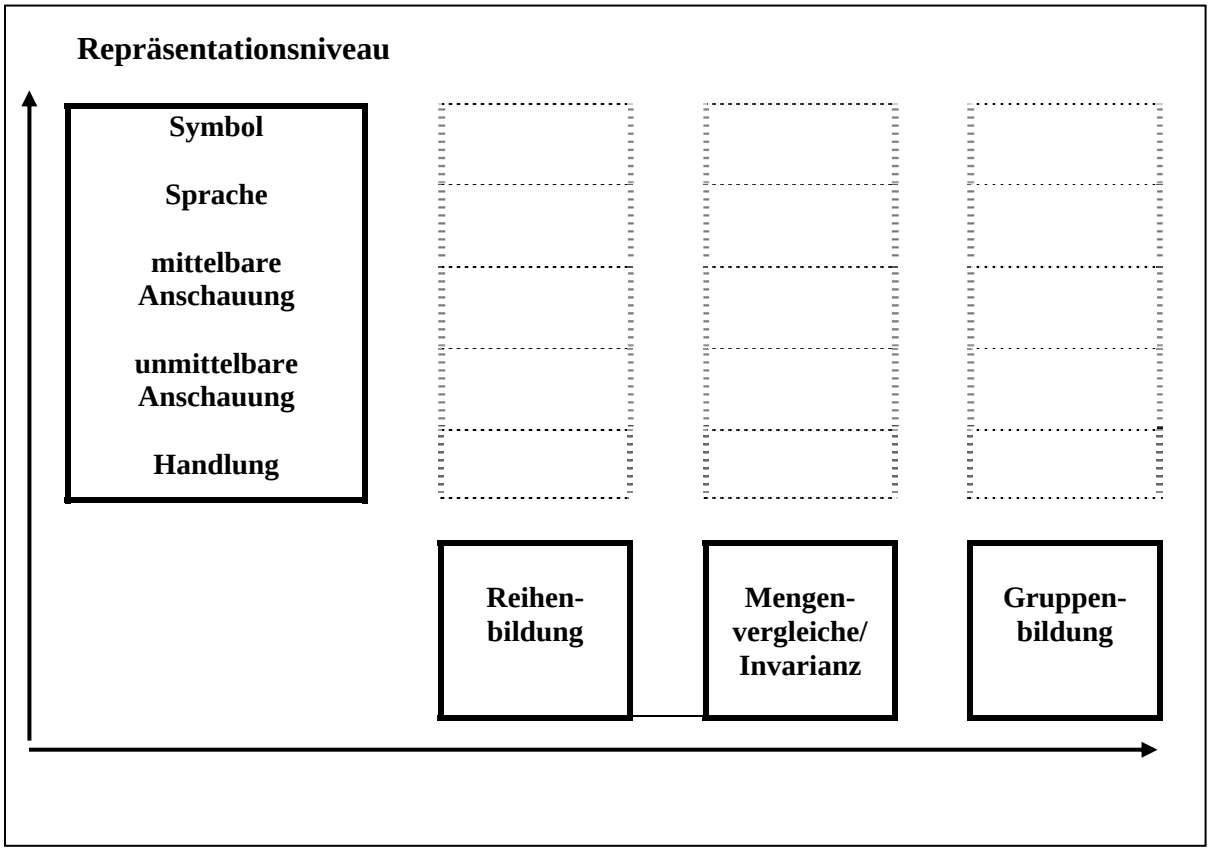

Abb. 3: Lernstrukturgitter zur Zahlbegriffsentwicklung nach König & Ebert (2001)

Als ein Förderprogramm für das Erlernen bzw. dem Umgang mit Mengen und Zahlen entwickelten Moog und Schulz (1999) den **Dortmunder Rechentest für die Eingangsstufe (DORT-E) und das Dortmunder Zahlbegriffstraining (ZBT).** Der Test ist zum Trainingsprogramm inhaltsanalog und soll daher zur Indikationsstellung für den Einstieg in das Zahlbegriffstraining auf einer angemessenen Anforderungsstufe sowie zur Lernerfolgskontrolle eingesetzt werden können.
DORT-E und ZBT haben das Ziel, die individuellen Einsichten des Schülers beim Umgang mit Zahlen prozessdiagnostisch offen zu legen. Der DORT-E testet und der ZBT fördert die Bereiche:

- Zählfertigkeiten
- Mengen- und Zahlrelationen, Mengenoperationen
- Numerisches Rechnen im Zahlenraum bis 20

Die Überprüfung erfolgt meist in alltagsnahen Kontexten und auf unterschiedlichen Repräsentationsebenen (konkret-gegenständlich, bildlich und abstrakt-symbolisch). Um die individuellen Einsichten und Vorstellungen in mathematische Zusammenhänge und Lösungsprozesse offen zu legen, werden die Lösungswege protokolliert, kann nachgefragt, die Aufgabe variiert und ggf. ein diagnostischer Dialog geführt werden. Ziel ist es, die Schüler durch das ZBT von anschauungsgebundenen Rechenstrategien wegzuführen.

Der DORT-E ist ein informeller Einzeltest, bestehend aus 3 Subtests mit je 33 Aufgaben. Er wird von einem Testleiter und einem Protokollanten durchgeführt. Auf standardisierten Protokollbögen werden die Lösungen, Verhaltensbeobachtungen und Explorationsergebnisse zur Rechenstrategie notiert. Als informeller Einzeltest gibt das Verfahren einen ersten Überblick über die Fähigkeiten des Probanden bezüglich der Bereiche: Zählfertigkeiten, Mengen- und Zahlrelationen, Mengenoperationen sowie des numerischen Rechnens im Zahlenraum bis 10. Für die Prozessdiagnostik ist anzumerken, dass nach dem Manual immer derselbe Test als Re-Test durchgeführt werden soll. Dies kann u.U. zu einer Testgewöhnung und damit zu verfälschten Ergebnissen führen, bildet andererseits aber relativ klar einen möglichen Lern- und Entwicklungsfortschritt des Kindes ab.

Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (Van Luit, van de Rijt, Hasemann, 2001)
Auf der Grundlage vorliegender Forschungsergebnisse werden von den Autoren acht Komponenten des frühen Zahlbegriffs unterschieden und durch eine erste Auswahl von 120 Aufgaben operationalisiert:

- Vergleichen (Beherrschung von Begriffen als Voraussetzung für die Bildung mathematischer Ordnungsbegriffe und -relationen)
- Klassifizieren (Zusammenfassung bzw. Differenzierung von Objekten aufgrund von Übereinstimmungen)
- Eins-zu-Eins-Zuordnen (Vergleich der Mächtigkeit von Mengen durch Eins-zu-Eins-Zuordnung)
- nach Reihenfolge ordnen (Erkennen einer korrekten Anordnung)
- Zahlwörter benutzen (vorwärts- und rückwärts Zählen, Weiterzählen, Verwendung von Kardinal- und Ordinalzahlen)
- synchrones und verkürztes Zählen (abzählen, verkürztes Zählen unter der Verwendung der Zahlbilder beim Würfel, Abzählen von Quantitäten)
- resultatives Zählen (Zählen von strukturierten und unstrukturierten Quantitäten)

- Anwenden von Zahlenwissen (Zahlwissen auf einfache Problemsituationen anwenden, Verwendung der Zahlen bis 20 in Alltagssituationen)

Der Test ist konzipiert für Kinder im Alter von etwa 5 bis 7 ½ Jahren, d.h. für Kindergarten-, Vorschulkinder und Schulanfänger. Die vierzig vorgegeben Aufgaben sollen durch das Kind in der vorgegebenen Reihenfolge vollständig bearbeitet werden. Das Gesamtergebnis des Testes führt zu einem Kompetenzergebnis, das mittels Normtabellen in Bezug zur Altersgruppe zu einem Prozentrang führt. Das Verfahren beschreibt den Entwicklungsstand eines Kindes in Form eines Kompetenz/eines Niveaus in Relation zu seiner Altersnorm und damit einer erwarteten Leistungsnorm. Diese Kompetenzen bzw. Niveaus (von A bis E) werden über Prozentränge definiert und wie folgt beschrieben (27):

- „Niveau A: gut bis sehr gut (das Ergebnis des Kindes gehört zu den ca. 25 % der besten seiner Altersgruppe). ...
- Niveau E: sehr schwach bis schwach (Das Ergebnis des Kindes gehört zu den 10 % der schlechtesten seiner Altersgruppe)“.

Durch Wiederholung in bestimmten zeitlichen Abständen kann der intraindividuelle Lernfortschritt eines Kindes innerhalb der einzelnen Bereiche beschrieben werden. Für eine nachfolgende Förderung sind die Ergebnisse der einzelnen der acht Bereiche des Zahlbegriffs heranzuziehen. Es sind somit Rückschlüsse auf förderbedürftige Bereiche möglich.

Neben diesen Verfahren bieten sich für eine spontane Diagnostik sowohl die Beobachtung des Zählvorganges beim Kinde selbst sowie sein Umgang mit den Zahlwörtern an. Für die Interpretation beider Tätigkeiten sind die Zählprinzipien nach Stern, 1998 (vgl. 6.3.1.1) sowie die Niveaustufen innerhalb des Erwerbs der Zahlwortreihe (Fuson, 1981, vgl. Kapitel 6.3.1.2) sinnvoll.

Da insgesamt nicht mehr von einem generell-gleichartigen Entwicklung des Zahlbegriffs bei allen Kindern auszugehen ist, bleibt als prinzipieller diagnostischer Zugang eine Analyse der Situation, in der der Schüler mit dem jeweiligen Sachverhalt konfrontiert wird (Fritz, 2003, S. 288; Werner, 2003; Werning, 2002; Kornmann, 2003; Wittoch, 2003).

All diese konstruktivistisch bzw. systemtheoretisch orientierten Zugänge gehen davon aus, dass Lernprozesse nur in einer inneren Passung zwischen den Lernanforderungen des Gegenstandes, den angemessenen ‚Lernarrangements’ (Wittoch, 2003, S. 310) und den individuellen Lernvoraussetzungen des Schülers erfolgreich sind. Diagnostische Fragen berücksichtigen demnach alle drei Bereiche als Bestimmungsmerkmale der Lernsituation. Ausgehend von den individuellen Lern- und Entwicklungsvoraussetzungen werden die mathematische Sachverhalte so ausgewählt und didaktisch aufbereitet, dass deren Anforderungs- bzw. Sachstruktur beim Kind entsprechende Lösungs- und Entwicklungsmöglichkeiten provozieren.

Zentral für diagnostische und didaktisch-methodische Entscheidungen sind drei Fragen:

1. Die Frage nach den sachstrukturellen Anforderungen des Gegenstandes selbst: Was verlangt die Aufgabe; über welche mathematischen Einsichten, Fähigkeiten und Fertigkeiten muss das Kind verfügen, um die Aufgabe lösen zu können?
2. Die Frage nach den Aneignungsstrukturen des Kindes: Über welche Lernvoraussetzungen bezüglich dieses Sachverhaltes verfügt der Schüler?
3. Die Frage nach der Eignung der didaktisch-methodischen Gestaltung: Mit welchen Anschauungsmitteln usw. hat der Schüler Gelegenheit, sich mit dem Sachverhalt auseinander zu setzen? (Werner, 2003, S. 240)

Die hier skizzierte Theorie sowie die Entwicklungsprinzipien können dabei als Folie und Interpretationsmuster für die Analyse des Schülerverhaltens und eine konkrete Förderplanung zugrunde gelegt werden.

Abschließend seien noch einige Materialien, Veröffentlichungen genannt, die weitere didaktisch-methodische und diagnostische Anregungen zur Zahlbegriffsentwicklung enthalten:

- „Die Grundschulzeitschrift“ (2000) Themenheft 133: Kinder entdecken Zahlenmuster
- Ellrott, D. & Aps-Ellrott, B. (1995). Förderdidaktik. Offenburg : Mildenberger
- Materialien aus dem Projekt „mathe 2000“: besonders: CD-ROM Blitzrechnen 1 und 2; Müller, G. & Wittmann, E. (1990): Das Zahlenbuch (Klasse 1 – 4) (vgl. www.uni-dortmund.de und www.klett.de)
- Moser-Opitz, E. (2001). Zählen Zahlbegriff Rechnen. Bern: Haupt; hier besonders Kapitel 2.2.
- Müller, G. & Wittmann, E. (1995). Mit Kindern rechnen. Hannover: Arbeitskreis Grundschule
- Reich, F. (1994). Geistig behinderte lernen Voraussetzungen zum Zählen. Reihenbegriff und Zahlbegriff „1“. Dortmund: modernes lernen
- Wember, F. (1998). Zahlbegriff und elementares Rechnen. Vorschläge zur Diagnose und Intervention bei Kindern mit Lernstörungen. Studienbrief der Fernuniversität Hagen

Literatur:

Aebli, H. (1963). *Über die geistige Entwicklung des Kindes*. Stuttgart: Klett

Aebli, H. (1964). Zur Einführung. In Piaget, J. & Szeminska, A., *Die Entwicklung des Zahlbegriffes beim Kinde* (S. 7 – 8). Stuttgart: Klett

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In IDM (Hrsg.). *Lehren und Lernen von Mathematik*. Köln: Aulis (S. 1 – 56)

Begemann, E. (1997). *Lebens- und Lernbegleitung konkret*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt

Behring, K. & Kretschmann, R. & Dobrindt, Y. (1999). *Prozessdiagnose mathematischer Kompetenzen in den Schuljahren 1 und 2*. Band 1 - 3

Brainerd, Ch. (1979). *The origins of number concept*. New York:

Case, R. (1999). *Die geistige Entwicklung des Menschen*. Heidelberg: Schindele

Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können*. Basel: Birkhäuser

Devlin, K. (2000). *Das Mathe-Gen*. Stuttgart: Klett

Damerow, P. (1993). Zum Verhältnis von Ontogenese und Historiogenese des Zahlbegriffes. In W. Edelstein/S. Hoppe-Graf (Hrsg.) *Die Konstruktion kognitiver Strukturen* (S. 195 – 260). Bern: Huber

Fritz, A. (2003). Bedingungsvariationen und Fehleranalysen als Beobachtungszugänge zur Diagnostik arithmetischer Kompetenz. In A. Fritz/G. Ricken/S. Schmidt (Hrsg.), *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 283 - 308). Weinheim: Beltz

Fuson, K.C. & Richards, J. (1979*). Children's construction of the counting number, from a spew to a bi-directional chain.* Preliminary draft: Northwestern University

Fuson, K.C. (1988). *Children's counting and concepts of numbers*. New York: Springer

Gelmann, R. & Gallistel, C.R. (1978). *The children's understanding of number*. Cambrigde, MA: Harvard University Press

Gelmann, R. (1990). First principles organize attention to and learn about relevant data: Number an the animate-inanimate distinction as examples. *Cognitive Science*, 14, 19 – 106

Johann, M. (1999). *Eine empirische Theorie des Zahlbegriffes*. Frankfurt: Peter Lang

Kant, I. (1787/1995). *Kritik der reinen Vernunft*. Köln: Könemann

König, H.-W. & Ebert, B. (2001). *Qualitatives Prüfverfahren zum mathematischen Verständnis von Sachverhalten, den Grundlagen des Verstehens von Zahlen und Rechenoperationen*. IPTS 22, D 13; Kronshagen: Landesseminar für Sonderpädagogik

Kordos, M. (1999). *Streifzüge durch die Mathematikdidaktik*. Stuttgart: Klett

Kornmann, R. (2003). Kommentar: Analysen von Rechenschwierigkeiten aus unterschiedlichen Perspektiven. In A. Fritz/G. Ricken/S. Schmidt (Hrsg.), *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 248 – 259). Weinheim: Beltz

Kutzer, R. & Probst. J.(o.J.): *Strukturbezogene Aufgaben zur Prüfung mathematischer Einsichten*. Marburg: Philipps-Universität

Lorenz, J.H. & Radatz, H. (1993). *Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht*. Hannover: Schroedel

Moog, W. & Schulz, A. (1999). *Zahlen begreifen. Diagnose und Förderung bei Kindern mit Rechenschwäche*. Berlin: Luchterhand

Moser-Opitz, E. (2001). *Zählen Zahlbegriff Rechnen. Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderschulen*. Bern: Haupt

Müller, G. & Wittmann, E. (1995). *Mit Kindern rechnen*. Hannover: Arbeitskreis Grundschule

Odenbach, K. (1964). Zur Einführung. In J. Piaget & K. Resag & A. Fricke & P.M. van Hiele, *Rechenunterricht und Zahlbegriff* (S. 7 – 21). Braunschweig: Westermann

Paturi, F. (1998). *Harenberg Schlüsseldaten Entdeckungen und Erfindungen*. Dortmund: Harenberg Lexikon

Petermann, F. & Niebank, K. & Scheithauer, H. (2000) (Hrsg.). *Risiken in der frühkindlichen Entwicklung. Entwicklungspathologie der ersten Lebensjahre*. Göttingen: Hogrefe

Piaget, J. & Szeminska, A. (1965). *Die Entwicklung des Zahlbegriffes beim Kinde*. Stuttgart: Klett

Piaget, J. (1970). *Jean Piaget über Jean Piaget*. München: Kindler

Piaget, J. (1980). *Die Bildung des Zeitbegriffes beim Kinde*. Stuttgart: Klett

Probst, H. & Waniek, D. (2003). Kommentar: Erste numerische Kenntnisse von Kindern und ihre didaktische Bedeutung. In A. Fritz/G. Ricken/S. Schmidt (Hrsg.), *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 65 - 78). Weinheim: Beltz

Radatz, H. & Schipper, W. (1983). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel

Schmidt, S. (2003). Arithmetische Befunde am Schulanfang. In: A. Fritz/G. Ricken/S. Schmidt (Hrsg.), *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (26 – 47). Weinheim: Beltz

Schröder, E. (1993). Individuelle Konstruktion und kognitive Entwicklung: Eine Analyse der Veränderung intraindividueller Unterschiede. In W. Edelstein (Hrsg.) *Die Konstruktion kognitiver Strukturen.* (S. 139 – 155). Bern: Huber

Schülerduden (1990). *Mathematik I. Ein Lexikon zur Schulmathematik der Sekundarstufe I.* Mannheim: Dudenverlag

Schulz, A. & v. Bebber, L. & Moog, W. (1998). Mathematische Basiskompetenzen lernbehinderter Schüler. *Zeitschrift für Heilpädagogik*, 49, 402 - 411

Stern, E. (1998a). *Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter*. Lengerich: Pabst
Stern, E. (1998b). Die Entwicklung schulbezogener Kompetenzen: Mathematik. In F. Weinert (Hrsg.). *Entwicklung im Kindesalter* (S.95 – 113). Weinheim: Beltz
v. Glasersfeld, E. (1997). *Radikaler Konstruktivismus*. Frankfurt: Suhrkamp
Van de Rijt, B. & Van Luit, J. & Hasemann, K. (2000). Zur Messung der frühen Zahlbegriffsentwicklung. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie*, 32 (1), 14 – 24
Van Luit, J.& van de Rijt, B. & Hasemann, K. (2001). *Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung*. Göttingen: Hogrefe
Voigt, F. (1983). *Entwicklungslinien des Zahlbegriffs im Vorschulalter: eine Längsschnittsstudie.* Dissertation; Universität Heidelberg
Wember, F. (2003). Die Entwicklung des Zahlbegriffes aus psychologischer Sicht. In A. Fritz/G. Ricken/S. Schmidt (Hrsg.), *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 48 – 64). Weinheim: Beltz
Wember, F.B. (1999). *Zahlbegriff und elementares Rechnen.* Studienbrief (4574-1-01-S 1) der
Wember, F. (1986). *Piagets Bedeutung für die Lernbehindertenpädagogik*. Heidelberg: Auer Fernuniversität Hagen
Werning, R. & Balgo, R. & Palmowski, W. & Sassenroth, M. (2002). *Sonderpädagogik*. München: Oldenbourg
Werner, B. (2003). „Mit der Hundertertafel stimmt etwas nicht“ – Mathematikunterricht beobachten und verstehen. In Balgo, R. & Werning, R. (2003). *Lernen und Lernprobleme im systemischen Diskurs* (S. 233 – 254). Dortmund: borgmann
Wittgenstein, L. (1994). *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Frankfurt: Suhrkamp
Wittoch, M. (2003). Diagnostik von Unterrichts- und Erziehungsbedingungen am Beispiel des Rechnenlernens. In A. Fritz/G. Ricken/S. Schmidt (Hrsg.), *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 309 – 330). Weinheim: Beltz
Wynn, K. (1990). Children’s understanding of counting. *Cognition*, 36, 155 - 193
Zur Oeveste, H. (1987). *Kognitive Entwicklung im Vor- und Grundschulalter*. Göttingen: Hogrefe