Übung zu Modul: Innermathematische Beziehungen
Lineare Algebra und analytische Geometrie

Prof. Dr. Michael Gieding
Fabian Grünig

Sommersemester 2017
Mittwoch, 12:00 Uhr, A233

Aufgabe 1 *(Wiederholung Vektorrechnung)*
Wir betrachten die Euklidische Ebene als

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

die Menge aller Paare von reellen Zahlen. Berechne die folgenden Ausdrücke.

(i) $\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

(ii) $2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $-1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $0 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

(iii) $2 \cdot \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} \right)$, $2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 *(Einfache Geometrie $\mathbb{R}^2$)*
Für ein Element $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ bezeichnen wir die *Länge* oder *Norm* dieses Elements mit $|(x, y)|$ und meinen damit

$$|(x, y)| = +\sqrt{x^2 + y^2}.$$

(i) Berechne die Längen der folgenden Elemente: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

(ii) Es seien $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt auf der 1. Achse und $(0, y) \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt auf der 2. Achse des Kartesischen Koordinatensystems in $\mathbb{R}^2$.

  (a) Überlege dir: Gilt $x \neq 0$ und $y \neq 0$, so spannen die Punkte $(0, 0)$, $(x, 0)$ und $(0, y)$ ein rechtwinkliges Dreieck auf.

  (b) Zeige, dass sich die oben definierte Länge von $(x, -y)$ mit der „anschaulichen" Länge der Strecke zwischen $(x, 0)$ und $(0, y)$, die sich durch den Satz den Pythagoras berechnen lässt, zusammenfallen.

(Tipp: Löse die Aufgabe zunächst für eine Spezialisierung, etwa $x = 4$, $y = 3$).

Aufgabe 3 *(Einfache Teilmengen $\mathbb{R}^2$)*
Es seien $m, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Wir betrachten die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = m \cdot x + b\} = \{(x, m \cdot x + b) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

(i) Zeige: Sind $(x, y) \in U$ und $(v, w) \in U$, dann ist $(x, y) - (v, w) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = m \cdot x\}$, also ein Element der Ursprungsgerade mit Steigung m.
(Tipp: Welche Gestalt müssen y und w haben?)

(ii) Überlege dir, dass die folgenden Beschreibungen von U äquivalent sind

  (a) U ist die oben beschriebene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$

  (b) U ist die durch $(0, b)$ und $(1, m + b)$ verlaufende Gerade.

  (c) U ist die Gerade mit Fußpunkt $(0, b)$ und Richtung $(1, m)$.

  (d) U ist die Nullstellenmenge des Polynoms $Y = mX + b$.