Übung zu Modul: Innermathematische Beziehungen
Lineare Algebra und analytische Geometrie

Fabian Grünig
gruenig@ph-heidelberg.de

Sommersemester 2017
Mittwochs, 12:00 Uhr, A233

Projekt: *Entwicklung des Abstandsbegriffs im* $\mathbb{R}^3$

Wir betrachten den Euklidischen Anschauungsraum als $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$, also als die Menge aller Tripel (3-Tupel) von reellen Zahlen. Für ein Element $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ wird dessen *Norm* $\left\|\vec{v}\right\|$ wie folgt definiert.

$$\left\|\vec{v}\right\| = \left\|(x,y,z)\right\| = +\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Für zwei Elemente $\vec{v} = (x_1,y_1,z_2) \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{w} = (x_2,y_2,z_3) \in \mathbb{R}^3$ wird darüber eine *Metrik* oder ein *Abstandsbegriff* erklärt. Dieser definiert sich wie folgt.

$$\operatorname{dist}(\vec{v},\vec{w}) = \left\|\vec{v}-\vec{w}\right\| = \left\|(x_1,y_1,z_1)-(x_2,y_2,z_2)\right\| = +\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

In dieser Aufgabe wollen wir die geometrische Anschauung dieser Begriffe entwickeln.

Aufgabe 4 *(Längen und Abstände auf Zahlengeraden)*
Wir betrachten zunächst die Punkte auf Zahlengeraden, vestanden als eine Koordinatenachsen des Anschauungsraums. Wir bezeichnen diese drei Achsen mit

$$G_1 = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$G_2 = \{(0,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\}$$
$$G_3 = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

(i) Berechne die Normen der folgenden Vektoren aus G_1 und deren jeweiligen Abstände.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Lohnt es sich, die Übung (i) für Elemente auf den anderen Achsen G_2, G_3 zu wiederholen?

(iii) Überlege Dir den Zusammenhang der folgenden Begriffe.
- Die oben definierte Norm von Elementen auf einer Koordinatenachse
- Der Absolutbetrag $|x|$ von reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$.
- Die anschauliche Länge von Strecken auf der Zahlengeraden, die im Nullpunkt beginnen.

(iv) Überlege Dir den Zusammenhang der folgenden Begriffe.
- Der oben definierte Abstand zweier Elementen auf einer Koordinatenachse
- Der Absolutbetrag $|x-y|$ von Differenzen $x-y$ von reellen Zahlen $x,y \in \mathbb{R}$.
- Die anschauliche Länge von Strecken auf der Zahlengeraden.

AUFGABE 5 *(Längen und Abstände in Ebenen)*
Mit Rückblick auf AUFGABE 2 entwickeln wir eine geometrische Vorstellung der obigen Längen- und Abstandsbegriffe auf den von den Koordinatenachsen aufgespannten Ebenen.

$$E_{(1,2)} = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$
$$E_{(1,3)} = \{(x,0,z) \mid x,z \in \mathbb{R}\}$$
$$E_{(2,3)} = \{(0,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$$

(i) Zeige, dass sich ein Element aus $\vec{v} \in E_{1,2}$ stets als eine Summe zweier Elemente $\vec{v} = \vec{x} + \vec{y}$ mit $\vec{x} \in G_1$ und $\vec{y} \in G_2$ schreiben lässt.

(ii) Seien $\vec{x} \in G_1$ und $\vec{y} \in G_2$. Zeige, dass in diesem Fall stets Folgendes gilt.

$$\left\|\vec{x} + \vec{y}\right\| = \operatorname{dist}(\vec{x}, -\vec{y}) = \operatorname{dist}(-\vec{x}, \vec{y})$$

(iii) Überlege dir mit Hilfe von AUFGABE 2, dass sich die Norm eines Elements $\vec{v} = (x,y,0) \in E_{(1,2)}$ mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$ stets als die geometrische Länge der Hypotenuse des von den Eckpunkten

$$(0,0,0); \quad (x,0,0); \quad (0,y,0)$$

gebildeten Dreiecks interpretieren lässt.

(iv) Lohnt es sich, diese Überlegungen (i) bis (iii) für $E_{(1,3)}$ und $E_{(2,3)}$ zu wiederholen?

AUFGABE 6 *(Längen und Abstände im Anschauungsraum)*
Es sei $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ein Element des Anschauungsraums. Für den Fall dass $x = 0$, $y = 0$ oder $z = 0$, liegt $\vec{v}$ auf einer Koordinatenachse oder in einer der Ebenen aus AUFGABE 4. In diesem Fall haben wir bereits eine geometrische Anschauung von dessen Norm. Wir betrachten demnach den Fall $x \neq 0$, $y \neq 0$ und $z \neq 0$.

(i) Überlege Dir, dass $(x,y,z) - (0,0,z)$ in $E_{(1,2)}$ liegt und dass die Punkte

$$(0,0,0); \quad (x,y,0); \quad (x,y,z)$$

Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks sind.

(ii) Beschreibe die geometrische Länge von $\vec{v}$ über zweifache Anwendung des Satz des Pythagoras als Länge der Hypothenuse des von den Eckpunkten

$$(0,0,0); \quad (x,y,0); \quad (x,y,z)$$

gebildeten Dreiecks. Zeige, dass diese Länge der Norm von $\vec{v}$ entspricht.

(iii) Ist die Beschreibung der Norm von $\vec{v}$ auch als die Länge der Hypothenuse des von den Eckpunkten

$$(0,0,0); \quad (0,y,z); \quad (x,y,z)$$

oder

$$(0,0,0); \quad (x,0,y); \quad (x,y,z)$$

gebildeten Dreiecks möglich?

(iv) Ist die Beschreibung der Norm von $\vec{v}$ auch als die Länge der Hypothenuse des von den Eckpunkten

$$(0,0,0); \quad (0,0,z); \quad (x,y,0)$$

gebildeten Dreiecks möglich?