Übung zu Modul: Innermathematische Beziehungen
Zahlentheorie

Prof. Dr. Markus Vogel
Fabian Grünig

Sommersemester 2017
Mittwoch, 12:00 Uhr, A233

AUFGABE 1 *(Bestimmung von Teilern)*

(i) Im Folgenden seien $p, q \in \mathbb{Z}$ Primzahlen sowie $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Bestimme alle (positiven) Teiler der folgenden Elemente in den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$:

(a) 2, 6, 12, 40, 2010, 2011

(b) $p \cdot q, \quad p^n, \quad q \cdot p^n$

(ii) Im Folgenden sei X eine Variable. Wir bezeichnen mit $\mathbb{Q}[X]$ die Menge aller Polynome in der Variablen X mit rationalen Koeffizienten. Es seien außerdem $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ rationale Zahlen. Bestimme alle (normierten) Teiler der folgenden Elemente in $\mathbb{Q}[X]$:

(a) $X - 1, \quad (X-1)^2, \quad X^2 + 1, \quad X^2 - 2$

(b) $X^2 + X - 2, \quad X^3 - 3X - 2, \quad X^3 - 2$

(c) $X^2 + (2\alpha)X + \alpha^2, \quad X^2 - \alpha^2, \quad X^2 + (\alpha + \beta)X + (\alpha \cdot \beta)$

(iii) Was ändert sich, wenn wir in (ii)(a) und (ii)(b) Polynome aus $\mathbb{R}[X]$ mit reellen Koeffizienten als Teiler zulassen? Was ändert sich, wenn wir Polynome aus $\mathbb{C}[X]$ mit komplexen Koeffizienten zulassen?

(iv) Was ändert sich, wenn wir in (i)(a) noch die Quadratwurzel $\sqrt{2}$ von 2 als mögliche Teiler zulassen?
Was ändert sich, wenn wir die imaginäre Einheit $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$ und damit Zahlen der Form

$$a + i \cdot b \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

als Teiler zulassen?
Was ändert sich, wenn wir rationale Zahlen aus $\mathbb{Q}$ als Teiler zulassen?

AUFGABE 2 *(Einfache zahlentheoretische Beweise)*
Es seien $n, m \in \mathbb{Z}$ zwei ganze Zahlen. Beweise die folgenden Aussagen.

(i) Sind m und n gerade Zahlen, dann ist auch ihre Summe $(m+n)$ eine gerade Zahl.

(ii) Sind m und n ungerade Zahlen, dann ist ihre Summe $(m+n)$ eine gerade Zahl.

(iii) Ist m eine gerade Zahl und n eine ungerade Zahl, dann ist ihre Summe $(m+n)$ ungerade.

(iv) Ist n eine gerade Zahl, dann ist auch ihr Quadrat n^2 eine gerade Zahl.

(v) Ist n eine ungerade Zahl, dann ist auch ihr Quadrat n^2 eine ungerade Zahl.

(vi) Ist n das Quadrat einen geraden ganzen Zahl $k \in \mathbb{Z}$, also $k^2 = n$, dann ist n gerade.

(vii) Ist n das Quadrat einen ungeraden ganzen Zahl $k \in \mathbb{Z}$, also $k^2 = n$, dann ist n ungerade.