# **Übung zu Modul: Innermathematische Beziehungen**
## Zahlentheorie

Fabian Grünig
gruenig@ph-heidelberg.de

Sommersemester 2017
Mittwoch, 12:00 Uhr, A233

---

**Aufgabe 3** *(Charakterisierung von Primzahlen)*
Im Sinne der Vorlesung ist $0 \neq p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, falls $T(p) = \{1, p\}$ gilt.

(i) Zeige, dass für $0 \neq k \in \mathbb{N}$ mit $k > 1$ die folgenden Aussagen äquivalent sind.
  - $k$ ist eine Primzahl, d. h. $T(k) = \{1, k\}$.
  - Sind $p, q \in \mathbb{N}$ zwei Zahlen mit $k = p \cdot q$. Dann gilt $p = 1$ oder $q = 1$.
  - Sind $p, q \in \mathbb{N}$ zwei Zahlen mit $k = p \cdot q$. Dann gilt $p = k$ oder $q = k$.

(ii) Es sei $0 \neq k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass für beliebige natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ aus $k \mid ab$ bereits $k \mid a$ oder $k \mid b$ folgt. Zeige, dass es sich bei $k$ um eine Primzahl handelt.
*(Hinweis: Es gilt auch die Umkehrung. Diese wird zu einem späteren Zeitpunkt in der Vorlesung behandelt.)*

**Aufgabe 4** *(Beispiele)*

(i) Finde für die Zahlen 4, 6 und 45 jeweils Zahlenpaare $a, b \in \mathbb{Z}$, sodass sodass diese Zahlen Teilen von $a \cdot b$ sind, jedoch keine Teiler von $a$ und $b$ sind.

(ii) Zahlen mit genau zwei Teilern sind Primzahlen. Finde Zahlen mit genau *drei* Teilern. Wie sieht die Primfaktorzerlegung dieser Zahlen aus?

(iii) Finde Zahlen mit genau *vier* Teilern. Wie sieht die Primfaktorzerlegung dieser Zahlen aus?

(iv) Finde Zahlen mit genau *fünf* oder *sieben* Teilern. Wie sieht die Primfaktorzerlegung dieser Zahlen aus?

(v) Finde Zahlen mit genau *neun* Teilern. Wie sieht die Primfaktorzerlegung dieser Zahlen aus?

**Aufgabe 5** *(Mersenne-Primzahlen)*
Zur Erinnerung: Eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ heißt eine *Mersenne-Primzahl*, wenn sie die Gestalt

$$p = 2^n - 1,$$

für eine geeignete natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ hat. Beispiele für Mersenne-Primzahlen sind

$$3 = 2^2 - 1, \quad 7 = 2^3 - 1, \quad 31 = 2^5 - 1, \quad 131071 = 2^{17} - 1.$$

Wir zeigen in dieser Übung, dass Mersenne-Zahlen zur Basis 2 die einzigen Kandidaten für Primzahlen dieser Gestalt liefern. Außerdem entwickeln wir notwendige Voraussetzungen für den Exponenten $n$ von Mersenne-Primzahlen.

(i) Zeige, dass für eine ungerade Zahl $k \in \mathbb{N}$ die Zahl $k^2 - 1$ durch 8 teilbar ist.

(ii) Zeige, dass für eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ die Zahl der Gestalt $2^{2k} - 1$ keine Primzahl ist.
*Tipp: Verwende eine binomische Formel, um diese Zahl als Produkt zu schreiben.*

(iii) Es seien $a \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zeige, dass

$$(a^n - 1) = (a - 1) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^2 + a + 1).$$

*Tipp: Beginne mit der rechten Seite der Gleichung.*

(iv) Es seien $a \in \mathbb{Z}$ eine ganez Zahl und $n,k \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen. Zeige, dass

$$(a^{kn} - 1) = (a^k - 1) \cdot (a^{k(n-1)} + a^{k(n-2)} + \cdots + a^{2k} + a^k + 1).$$

(v) Es seien $a \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$, sodass $a^n - 1$ eine Primzahl ist. Zeige, dass dann notwendig auch $n$ eine Primzahl sein muss.
*Tipp: Zeige dies indirekt oder verwende ein Widerspruchsargument.*

(vi) Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $a \in \mathbb{N}$, sodass $a^p - 1$ eine Primzahl ist. Zeige, dass dann notwendig $a = 2$ gelten muss.

Wir haben insgesamt gezeigt, dass eine natürliche Zahl der Form $a^n - 1$ nur dann eine Primzahl sein kann, wenn sie *Mersenne*-Gestalt $2^p - 1$ hat, also $a = 2$ und $p$ prim.