Übung zu Modul: Innermathematische Beziehungen
Zahlentheorie

Fabian Grünig
gruenig@ph-heidelberg.de

Sommersemester 2017
Mittwoch, 12:00 Uhr, A233

Aufgabe 13 *(Konstruktion der positven rationalen Zahlen)*
Wir betrachten die Menge aller Paare

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N}^* = \{(z, n) \mid z \in \mathbb{N}, 0 \neq n \in \mathbb{N}\}$$

natürlicher Zahlen, wobei die zweite Komponente von Null verschieden ist. (Hierbei meinen wir mit $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die echt positiven natürlichen Zahlen.)

Auf dieser Menge definieren wir die folgende Relation zwischen Paaren $(z_1, n_1), (z_2, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$

$$(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2) \quad \text{gdw.} \quad z_1 \cdot n_2 = z_2 \cdot n_1.$$

Zeige, dass es sich bei dieser Relation um eine Äquivalenzrelation handelt, also das gilt

(i) Die Relation $\sim$ ist reflexiv. Es gilt also $(z, n) \sim (z, n)$ für alle $(z, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

(ii) Die Relation $\sim$ ist symmetrisch. Es gilt also für alle $(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2)$ in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ auch $(z_2, n_2) \sim (z_1, n_1)$.

(iii) Die Relation $\sim$ ist transitiv. Es gilt also für alle $(z_1, n_1) \sim (z_2, n_2)$ und $(z_2, n_2) \sim (z_3, n_3)$ in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ auch $(z_1, n_1) \sim (z_3, n_3)$.

Ist $(z, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, dann schreiben wir $\frac{z}{n}$ für die Äquivalenzklasse von (z, n), also für die Menge aller $(y, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ mit $z \cdot m = y \cdot n$.

Aufgabe 14 *(Charakterisierung rationaler Zahlen)*
Wir betrachten Gleichungen der Form $a \cdot X = b$ für natürliche Zahlen a und b mit $a \neq 0$. Beispiele dieser Gleichungen sind

$$1 \cdot X = 1, \quad 3 \cdot X = 4, \quad 7 \cdot X = 0.$$

(i) Schreibe $X = \frac{Z}{N}$ und verwende aus der Schule bekannte Rechenregeln für Brüche, um obige Gleichungen so umzuschreiben, dass die Variablen Z und N getrennt sind (auf verschiedenen Seiten des Gleichheitszeichens stehen).

(ii) Überlege Dir, dass eine Lösung $x = \frac{z}{n}$ der Gleichung $a \cdot X = b$ die Relation $(z, n) \sim (b, a)$ im Sinne von Aufgabe 13 erfüllt.

(iii) Überlege Dir, dass für Zahlenpaare $(z, n) \sim (b, a)$ in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, der Bruch $x = \frac{z}{n}$ eine Lösung der Gleichung $a \cdot X = b$ beschreibt.

Aufgabe 15 *(Teilen durch Null)*
Wir haben in der Definition (positiver) rationaler Zahlen $n \neq 0$ für den Nenner n gefordert. Zeige dass die Relation ohne diese Forderung auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *keine* Äquivalenzrelation ist.
Tipp: Finde ein geeignetes, konkretes Gegenbeispiel.

Aufgabe 16 *(Erweitern und Kürzen rationaler Zahlen)*
Es seien $(z,n),(y,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

(i) Zeige: Für alle $c \in \mathbb{N}^*$ gilt $(z,n) \sim (c \cdot z, c \cdot n)$.

(ii) Zeige: Gilt $(z,n) \sim (y,m)$, dann gilt $(z,n) \sim (c \cdot y, c \cdot m)$ für alle $c \in \mathbb{N}^*$.

(iii) Es sei d ein gemeinsamer Teiler von z und n. Seien dazu $\hat{z}, \hat{n} \in \mathbb{N}$ mit $z = d \cdot \hat{z}$ und $n = d \cdot \hat{n}$. Zeige, dass $(z,n) \sim (\hat{z}, \hat{n})$.

(iv) Gelte $(y,m) \sim (z,n)$ und sei d gemeinsamer Teiler von z,n, sowie $\hat{z}, \hat{n}$ wie oben. Zeige, dass dann $(y,m) \sim (\hat{z}, \hat{n})$.

Aufgabe 17 *(Vollständiges Kürzen)*

(i) Finde mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus die vollständig gekürzten Darstellungen der folgenden rationalen Zahlen.

$$\frac{18}{26}, \quad \frac{510}{850}, \quad \frac{96}{84}, \quad \frac{0}{32}$$

Hinweis: Eine Darstellung $\frac{z}{n}$ einer rationalen Zahl heißt vollständig gekürzt, falls $ggT(z,n) = 1$.

(ii) Finde mit Hilfe der Primfaktorzerlegung die vollständig gekürzten Darstellungen der folgenden rationalen Zahlen.

$$\frac{18}{26}, \quad \frac{2^7 \cdot 7^2}{2^3 \cdot 7^3}, \quad \frac{3^2 \cdot 6^2 \cdot 35 \cdot 15}{12 \cdot 9^2 \cdot 50}$$