Übung zu Modul: Innermathematische Beziehungen
Zahlentheorie

Fabian Grünig
gruenig@ph-heidelberg.de

Sommersemester 2017
Mittwoch, 12:00 Uhr, A233

Aufgabe 18 *(Zahlensysteme)*
Verwende die schriftliche Division mit Rest für die folgenden Umrechnungen.

(i) Stelle die folgenden Zahlen im Binärsystem dar: $7_{(10)}, 57_{(10)}, 8_{(10)}$.

(ii) Stelle die folgenden Zahlen im Octalsystem dar: $9_{(10)}, 57_{(10)}$.

(iii) Stelle jeweils im Dezimalsystem dar: $101_{(2)}, 1100_{(2)}, 22_{(8)}$. (Keine Division erforderlich.)

(iv) Überführe $31_{(8)}$ aus dem **Oct**alsystem in das Dezimalsystem und $25_{(10)}$ aus dem **Dez**imalsystem is das Octalsystem.
Witz: Warum können Mathematiker den ersten Weihnachtstag und Halloween nicht auseinanderhalten?

Aufgabe 19 *(Erweiterter Euklidischer Algorithmus)*

(i) Bestimme $d = \text{ggT}(28, 42)$ und führe anschließend den erweiterten euklidischen Algorithmus durch – stelle also d als Linearkombination von 28 und 42 dar.

(ii) Bestimme $\text{ggT}(57, 45)$ und führe anschließend den erweiterten euklidischen Algorithmus durch.

Aufgabe 20 *(Lineare Diophantische Gleichungen)*

(i) Führe den erweiterten euklidischen Algorithmus für die Zahlen 168 und 238 durch. Welche Zahlen lassen sich als Linearkombination von 168 und 238 schreiben?

(ii) Untersuche die folgenden linearen Diophantischen Gleichungen auf prinzipielle Lösbarkeit in den ganzen Zahlen.

(a) $X \cdot 12 + Y \cdot 30 = 54$

(b) $X \cdot 12 + Y \cdot 27 = 54$

(c) $X \cdot 12 + Y \cdot 26 = 54$

(d) $X \cdot 12 + Y \cdot 27 = 94$

(e) $X \cdot 13 + Y \cdot 27 = 54$

(f) $X \cdot 1511 + Y \cdot 9203 = 1$

Aufgabe 21 *(Lösungsmenge von linearen Diophantischen Gleichungen)*
Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$, dann betrachten wir die lineare Diophantische Gleichung $G\colon X \cdot a + Y \cdot b = c$.

(i) Zeige: Sind $(x_1, y_1) \in \mathbb{Z}^2$ und $(x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ zwei Lösungen von G, dann ist die Differenz $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ eine Lösung der Gleichung $G_0\colon X \cdot a + Y \cdot b = 0$.

(ii) Zeige: Ist $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ eine Lösung von G und $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ eine Lösung von G_0, dann ist die Summe $(x + x_0, y + y_0)$ wieder eine Lösung von G.

(iii) Es sei $d = \text{ggT}(a, b)$. Zeige: Die Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ von G_0 stimmen mit den Lösungen der folgenden Gleichung überein $x \cdot \frac{a}{d} = -y \cdot \frac{b}{d}$

(iv) Es sind $\frac{a}{d}$ und $\frac{b}{d}$ teilerfremd. Zeige hiermit, dass $\frac{a}{d} \mid y$ und $\frac{b}{d} \mid x$.

(v) Aussage (iv) besagt, dass es $s, t \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $x = s \cdot \frac{b}{d}$ und $y = t \cdot \frac{a}{d}$. Zeige mit Hilfe von (iii), dass $t = -s$ gilt.

(vi) Zeige: Für beliebiges $t \in \mathbb{Z}$ ist $(t \cdot \frac{b}{d}, -t \cdot \frac{a}{d})$ eine Lösung G_0.