Übung zu Modul: Innermathematische Beziehungen
Zahlentheorie

Fabian Grünig
gruenig@ph-heidelberg.de

Sommersemester 2017
Mittwoch, 12:00 Uhr, A233

Aufgabe 22 *(Sachaufgaben zu linearen Diophantischen Gleichungen)*

(i) Großvater ist ein sehr schwieriger Mensch. Seine Frühstsckseier müssen genau 15 Minuten gekocht werden und keinen Augenblick länger oder kürzer. Eines Tages bittet er Dich, ihm das Frühstück zu bereiten, doch die einzigen Uhren im Haus sind zwei Sanduhren. Bei der größeren dauert es elf Minuten, bis der Sand durchgelaufen ist, bei der kleineren sieben Minuten. Wie misst Du die 15 Minuten?

(ii) Es wollen 53 Studierende möglichst ökonomisch zum Fachschaftsfest fahren. Dafür stehen (in ausreichender Anzahl) Autos zur Verfügung, die mit fünf Personen besetzt werden können, sowie Tandemräder, die mit zwei Personen besetzt werden können.

  (a) Formuliere die Situation präzise in einer linearen Diophantischen Gleichung. Aus welcher Zahlenmenge können die Lösungen sinnvoller Weise nur stammen?

  (b) Bestimme eine Lösung mit der maximalen Anzahl an Autos.

  (c) Bestimme eine Lösung mit der maximalen Anzahl an Tandemräder.

  (d) Bestimme eine Lösung mit annähernd ausgeglichener Anzahl an Autos und Tandemräder.

Tipp: Wiederhole Aufgabe 21 *beziehungsweise Kapitel* 3*, Seite* 22 *im Skript.*

Aufgabe 23 *(Vertiefung: lineare Diophantische Gleichungen)*

(i) Gebe je ein Beispiel für eine lösbare und eine nicht lösbare lineare Diophantische Gleichung $c = x \cdot a + y \cdot b$ an, wobei die Zahlen a, b, c alle größer als 200 sein müssen.

(ii) Gebe eine möglichst einfache lineare Diophantische Gleichung an, die die allgemeine Lösung $x = 12 + 3k$, $y = 31 - 4k$ besitzt.
Führe mit der gefundenen linearen Diophantischen Gleichung das übliche Verfahren zur Bestimmung der Lösung durch und vergleiche diese Lösung mit der oben gegebenen. Wie hängen diese beiden Lösungen zusammen?

Aufgabe 24 *(Allgemeine Lösungen von linearen Diophantischen Gleichungen)*
Gebe die allgemeinen Lösungen der folgenden linearen Diophantischen Gleichungen an, falls eine existiert.

(i) $20 \cdot x + 56 \cdot y = 32$

(ii) $12 \cdot x + 8 \cdot y = 16$

(iii) $-28 \cdot x + 42 \cdot y = -56$

(iv) $-208 \cdot x - 156 \cdot y = 104$

AUFGABE 25 *(Wahr oder Falsch? – ggT und kgV)*
Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Finde für falsche Aussagen konkrete Gegenbeispiele.
Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Ist $\operatorname{ggT}(a, b) = a$, dann ist a eine Primzahl.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Ist $\operatorname{kgV}(a, b) = a \cdot b$, dann sind a und b Primzahlen.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Gilt $M(a) \subseteq M(b)$, dann gilt $a \mid b$.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Gilt $M(a) \subseteq M(b)$, dann gilt $b \mid a$.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Gilt $T(a) \subseteq T(b)$, dann gilt $a \mid b$.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Gilt $T(a) \subseteq T(b)$, dann gilt $b \mid a$.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Es gilt $\operatorname{ggT}(a, -a) = 1$.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Es gilt $\operatorname{kgV}(a, -a) \cdot \operatorname{ggT}(a, -a) = -a^2$.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Es gilt $\operatorname{kgV}(a \cdot b, a \cdot c) = a^2 \cdot \operatorname{kgV}(b, c)$.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Gilt $(a \mid b)$ und $(c \mid b)$ und $\operatorname{ggT}(a, c) = 1$, dann gilt auch $(a \cdot c) \mid b$.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Gilt $a \mid (b + c)$ und $a \mid c$, dann gilt auch $a \mid b$.

$\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Gilt $16 \mid a^4$, dann gilt auch $2 \mid a$.