Übung zu Modul: Innermathematische Beziehungen
Zahlentheorie

Fabian Grünig
gruenig@ph-heidelberg.de

Sommersemester 2017
Mittwoch, 12:00 Uhr, A233

Aufgabe 26 *(Vertreter von Restklassen)*
Bestimme für die folgenden Restklassen jeweils den kleinsten positiven Vertreter.

(i) $(13 \mod 3)$, $(131 \mod 11)$, $(890 \mod 111)$.

(ii) $(-1 \mod 2)$, $(-3 \mod 7)$, $(4 \mod 4)$, $(123 \mod 3)$.

(iii) $(1234 \mod 10)$, $(1234 \mod 100)$, $(1234 \mod 1000)$, $(1234 \mod 10000)$.

(iv) $(99 \mod 11)$, $(99 \mod 12)$, $(99 \mod 13)$, $(99 \mod 14)$.

Aufgabe 27 *(Gleichheit von Restklassen)*
Verbinde die Zahlen auf der linken Seite mit den Zahlen auf der rechten Seite, wenn sie Vertreter der gleichen Restklasse modulo 13 sind.

106	-41
-23	178
-1	39
10	18
20	-74
-104	-40
11	183
-17	-29
8	33
32	45
-8	-102
1	120
30	-5

Aufgabe 28 *(Addition und Multiplikation von Restklassen)*
Berechne die folgenden Restklassen und bestimme jeweils den kleinsten positiven Vertreter.

(i) $(13 \mod 4) + (17 \mod 4)$, $(131 \mod 11) + (48 \mod 11)$

(ii) $(149214 \mod 2) + (-157931 \mod 2)$, $(25 \mod 3) + (99 \mod 3)$

(iii) $(12 \mod 5) \cdot (18 \mod 5)$, $(-22 \mod 8) \cdot (19 \mod 8)$

(iv) $(16 \mod 17) \cdot (9 \mod 17)$, $(814 \mod 11) \cdot (132 \mod 11)$, $(33 \mod 15) \cdot (20 \mod 15)$

Aufgabe 29 *(Invertierung von Restklassen)*
Bestimme für folgende Restklassen jeweils die multiplikativ inverse Restklasse: Suche für gegebenes $(x \mod m)$ die kleinste positive Ganzzahl y, sodass $(x \mod m) \cdot (y \mod m) = (1 \mod m)$.

(i) Invertiere $(3 \mod 7)$. Invertiere $(5 \mod 8)$.

(ii) Ist $(35 \mod 12)$ invertierbar? Wenn ja, invertiere.

(iii) Ist $(34 \mod 12)$ invertierbar? Wenn ja, invertiere.

Tipp: Verwende den erweiterten Euklidischen Algorithmus.

Aufgabe 30 *(Teilbarkeitsregeln)*
Für eine Ganzzahl $x \in \mathbb{Z}$ betrachten wir deren Darstellung im Dezimalsystem

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k,$$

mit geeignetem $n \in \mathbb{N}$ und Ziffern $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Mit der Quersumme $\mathrm{QS}(x)$ von x meinen wir die Summe der Ziffern

$$\mathrm{QS}(x) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n,$$

mit der alternierenden Quersumme $\mathrm{aQS}(x)$ von x meinen wir die folgende Summe mit abwechselndem Vorzeichen

$$\mathrm{aQS}(x) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots \pm a_{n-1} \mp a_n.$$

Beweise die folgenden Aussagen.

(i) Eine Zahl $x \in \mathbb{Z}$ ist genau dann durch $m \in \mathbb{Z}$ teilbar, wenn $(x \mod m) = (0 \mod m)$ gilt.

(ii) Eine Zahl $x \in \mathbb{Z}$ ist genau dann durch 2 teilbar, wenn a_0 durch 2 teilbar ist.

(iii) Eine Zahl $x \in \mathbb{Z}$ ist genau dann durch 5 teilbar, wenn a_0 gleich 0 oder 5 ist.

(iv) Eine Zahl $x \in \mathbb{Z}$ ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme $\mathrm{QS}(x)$ durch 3 teilbar ist.

(v) Eine Zahl $x \in \mathbb{Z}$ ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme $\mathrm{QS}(x)$ durch 9 teilbar ist.

(vi) Eine Zahl $x \in \mathbb{Z}$ ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme $\mathrm{aQS}(x)$ durch 11 teilbar ist.

(vii) Findest du eine ähnliche Regel für die Teilbarkeit durch 7?
Tipp: Betrachte die Reste von 10^k beim Teilen durch 7.