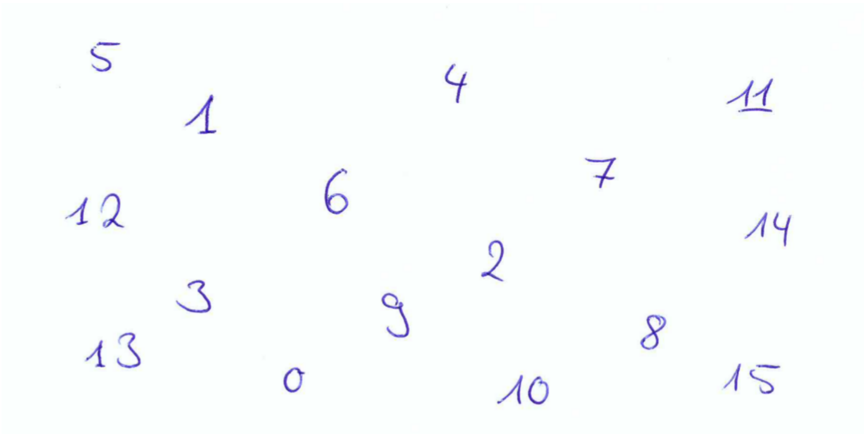
Innermathematische Beziehungen
Übungsveranstaltung

Fabian Grünig
gruenig@ph-heidelberg.de

Wintersemester 2017/18
Mittwoch, 10:00 Uhr, A206

Aufgabe 1 *(Klassenbildung via Division mit Rest)*
Es sei $m \in \mathbb{Z}$. Wir nennen zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ *kongruent bezüglich* m, falls x und y bei der Division durch m den gleichen Rest lassen.

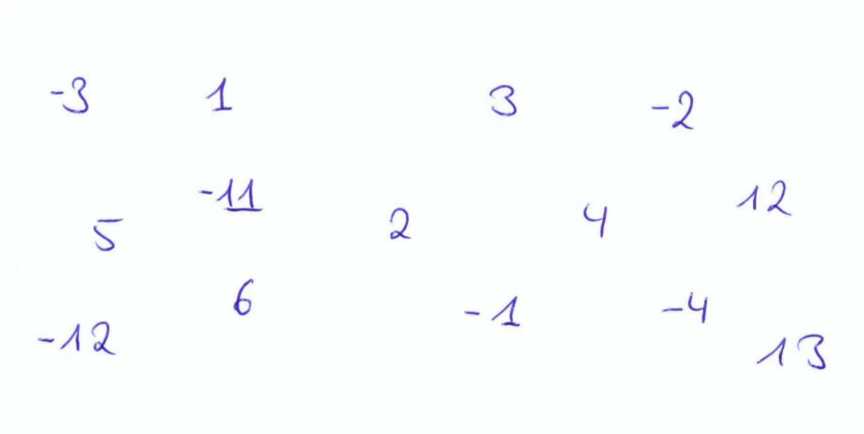
(i) Wir betrachten den Fall $m = 5$. Markiere jeweils die Zahlen in der folgenden Zahlenwolke, die zueinander kongruent bezüglich 5 sind.



(ii) Wir haben die Zahlen nun in Klassen eingeteilt. Wähle jeweils Zahlenpaare *innerhalb* einer Klasse und bilde deren Differenz. Was fällt Dir auf? Formuliere eine Vermutung.

(iii) Wähle nun jeweils Zahlenpaare aus *verschiedenen* Klassen und bilde deren Differenz. Was fällt Dir auf? Formuliere eine Vermutung.

(iv) Wir betrachten nun den Fall $m = 3$. Markiere jeweils die Zahlen in der folgenden Zahlenwolke, die zueinander kongruent bezüglich 3 sind.



(v) Auch hier haben wir die Zahlen in Klassen eingeteilt. Verifiziere Deine Vermutungen aus (ii) und (iii) anhand dieser Klassen.

Aufgabe 2 *(Charakterisierung von Kongruenzen)*
Es sei $m \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass für zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind.

(A) Die Zahlen x und y sind kongruent bezüglich m, lassen also bei der Division durch m den gleichen Rest.

(B) Die Differenz von x und y wird von m geteilt, es gilt also m teilt $(x - y)$.

Hinweis: Dies ist eine Äquivalenzaussage, es sind also die zwei Implikationen $(A) \Rightarrow (B)$ und $(B) \Rightarrow (A)$ zu zeigen.

Aufgabe 3 *(Addition und Klassenbildung)*
Wir betrachten Restklassen bezüglich $m = 5$ und die Zahlenmenge $M = \{-13, -8, -3, 2, 7, 12\}$.

(i) Verifiziere, dass die Zahlen aus M alle in der selben Restklasse bezüglich 5 liegen.

(ii) Suche Dir eine beliebige ganze Zahl x aus. Addiere zu dieser Zahl jeweils die Zahlen aus M, sodass du wieder eine Menge von 6 Zahlen erhälst.

(iii) Was fällt Dir bezüglich dieser Menge auf?

(iv) Deine Kommiliton*innen werden in (ii) vermutlich eine andere Zahl gewählt haben. Vergleicht und diskutiert Eure Ergebnisse. Könnt Ihr eine Vermutung aufstellen?

Aufgabe 4 *(Vertreterunabhängige Rechnungen bei der Klassenbildung)*
Es sei $m \in \mathbb{Z}$. Ferner seien $a, x, y \in \mathbb{Z}$ so gewäht, dass x und y kongruent bezüglich m sind.

(i) Zeige: $(a + x)$ und $(a + y)$ sind kongruent bezüglich m.

(ii) Zeige: $(a - x)$ und $(a - y)$ sind kongruent bezüglich m.

(iii) Zeige: $(a \cdot x)$ und $(a \cdot y)$ sind kongruent bezüglich m.

Aufgabe 5 *(Restklassen)*
Wir betrachten die Zahl $m = 7$.

(i) Es sei $x \in \mathbb{Z}$ eine beliebige ganze Zahl. Welche Reste sind bei der Division von x durch 7 möglich?

(ii) Die Division durch 7 teilt die gesamte Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen in Restklassen ein. Wieviele sind das? Gebe für jede Klasse den kleinsten positiven Vertreter und noch zwei weitere mögliche Vertreter an.

(iii) Wiederhole (i) und (ii) für $m = 4$ und $m = 2$.

Zusammenfassung: Wir haben in dieser Übung den Kongruenzbegriff im Zusammenhang der Division mit Rest wiederholt. Wir haben gesehen, dass eine Zahl $m \in \mathbb{Z}$ die ganzen Zahlen in m Restklassen einteilt (vgl. Aufgabe 1 und 5). Die Zahlen dieser Klassen haben gemeinsam, dass sie beim Teilen durch m den selben Rest lassen. Vertreter diesen Klassen weisen beim Rechnen (Addition, Differenzbildung, Multiplikation) gewisse Regelmäßigkeiten auf (vgl. Aufgabe 3 und 4). Diese Rechnungen werden am einfachsten und die Regelmäßigkeiten damit am sichtbarstein, wenn wir möglichst kleine Vertreter wählen (vgl. Aufgabe 5).