Innermathematische Beziehungen
Übungsveranstaltung

Fabian Grünig
gruenig@ph-heidelberg.de

Wintersemester 2017/18
Mittwoch, 10:00 Uhr, A206

Aufgabe 32 *(Einheiten und additive Erzeuger in $\mathbb{Z}_m$)*
Es sei $m \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten $\mathbb{Z}_m$. Ferner sei $\overline{x} \in \mathbb{Z}_m$ eine Restklasse mit $\overline{x} \neq \overline{0}$. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(A) Die Restklasse $\overline{x}$ ist eine Einheit in $\mathbb{Z}_m$, d. h. $\overline{x}$ ist multiplikativ invertierbar.

(B) Die Restklasse $\overline{x}$ ist additiver Erzeuger von $\mathbb{Z}_m$, d. h. $\langle\overline{x}\rangle = \mathbb{Z}_m$.

Hinweis: Verwende die Erkenntnisse aus Aufgabe 13.

Aufgabe 33 *(Nullteiler in $\mathbb{Z}_m$)*
In der Schulmathematik wird der folgende Sachverhalt (im Kontext reeller Zahlen) oft als der *Satz vom Nullprodukt* bezeichnet.

$$\text{Wenn } x \cdot y = 0, \text{dann muss bereits } x = 0 \text{ oder } y = 0 \text{ gelten.}$$

(i) Zeige, dass der *Satz von Nullprodukt* in $\mathbb{Z}_{12}$ nicht gilt, indem Du geeignete Gegenbeispiele findest. Wie sieht es in $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_7$ und $\mathbb{Z}_{11}$ aus?

(ii) Restklassen, die den *Satz vom Nullprodukt* verletzen, nennen wir *Nullteiler*. So ist etwa $[2]_4$ ein Nullteiler in $\mathbb{Z}_4$, da $[2]_4 \cdot [2]_4 = [0]_4$. Stelle jeweils für $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_9$ und $\mathbb{Z}_{12}$ eine Liste mit sämtlichen Nullteilern auf.

(iii) Stelle zusätzlich jeweils für $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_9$ und $\mathbb{Z}_{12}$ eine Liste mit sämtlichen Einheiten auf. Vergleiche diese Listen mit den entsprechenden Listen der Nullteiler. Was fällt dir auf?

Aufgabe 34 *(Nullteiler und Einheiten)*
Es sei $m \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten $\mathbb{Z}_m$. Zeige: Eine Restklasse in $\mathbb{Z}_m$ ist niemals gleichzeitig eine Einheit und ein Nullteiler.
Hinweis: Verwende ein Widerspruchsargument.

Aufgabe 35 *(Nullteiler und deren additive Erzeugnisse in $\mathbb{Z}_m$)*
Es sei $m \in \mathbb{Z}$ und wir betrachten $\mathbb{Z}_m$. Ferner sei $\overline{x} \in \mathbb{Z}_m$ eine Restklasse mit $\overline{x} \neq \overline{0}$. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(A) Die Restklasse $\overline{x}$ ist ein Nullteiler in $\mathbb{Z}_m$, d. h. es gibt eine weitere Restklasse $\overline{0} \neq \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$, sodass $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{0}$.

(B) Die Restklasse $\overline{x}$ erzeugt additiv eine *echte* Untergruppe von $\mathbb{Z}_m$, d. h. $\langle\overline{x}\rangle \neq \mathbb{Z}_m$ und $\langle\overline{x}\rangle \neq \{\overline{0}\}$.

Hinweis: Verwende die Erkenntnisse aus Aufgabe 13, 33 und 34.