Innermathematische Beziehungen
Übungsveranstaltung

Fabian Grünig
gruenig@ph-heidelberg.de

Wintersemester 2017/18
Mittwoch, 10:00 Uhr, A206

Aufgabe 36 *(Gruppenisomorphismen, einfache Invarianten)*
Es seien $(G, \circ)$ und $(H, *)$ zwei Gruppen und $f\colon G \longrightarrow H$ ein Gruppenisomorphismus. Zur Erinnerung: f heißt Gruppenisomorphismus, falls

- f ist als Abbildung zwischen Mengen bijektiv (injektiv und surjektiv).
- Für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt $f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) * f(g_2)$. Man sagt, f respektiere die Gruppenstruktur von G und H.

Zeige, dass f die folgenden Eigenschaften besitzt.

(i) f bildet Neutralelemente auf Neutralelemente ab: Sei e_G das Neutralelement in G und e_H das Neutralelement in H. Zeige, dass $f(e_G) = e_H$.
Hinweis: Verwende die besondere Eigenschaft des Neutralelements und die Kürzungsregel.

(ii) f bildet *nur* das Neutralelement auf das Neutralelement ab: Es sei $g \in G$ mit $f(g) = e_H$. Zeige, dass dann bereits $g = e_G$ gelten muss.
Hinweis: Argumentiere mit der Bijektivität von f.

(iii) f bildet inverse Elemente auf inverse Elemente ab: Es sei $g \in G$ und $g^{-1} \in G$ das inverse Element zu g. Zeige, dass $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.

Aufgabe 37 *(Kriterien für Gruppenisomorphismen)*
Wir betrachten $\mathbb{Z}_4$ und die folgenden Abbildungen $f_i\colon \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$.

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$f_1(x)$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$f_2(x)$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$
$f_3(x)$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$f_4(x)$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$
$f_5(x)$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$

Welche der Abbildungen f_i können keine Gruppenisomorphismen sein? Welche der Abbildungen f_i sind tatsächlich Gruppenisomorphismen?
Hinweis: Verwende die Invarianten aus Aufgabe 36, um schnell Abbildungen auszuschließen.

Aufgabe 38 *(Gruppenisomorphismen, weitere Invarianten)*
Es seien $(G, \circ)$ und $(H, *)$ zwei Gruppen und $f\colon G \longrightarrow H$ ein Gruppenisomorphismus.

(i) Es sei $g \in G$ und $k \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass $f(g^k) = f(g)^k$.
Hinsweis: Unterscheide die Fälle $k > 0$, $k = 0$ und $k < 0$.

(ii) Es sei $g \in G$. Zeige, dass $\operatorname{ord}(g) = \operatorname{ord}(f(g))$.
Hinweis: Zeige zunächst, dass $ord(g) \geq ord(f(g))$. Zeige dann $ord(g) \leq ord(f(g))$.

Aufgabe 39 *(Isomorphiefragen)*

(i) Wir betrachten die folgende Untergruppe der S_3.

$$G_1 = \{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\}.$$

Zeige, dass G_1 isomorph zu $\mathbb{Z}_3$ ist, indem du einen geeigneten Gruppenisomorphismus angibst.

(ii) Wir betrachten die folgende Untergruppe der S_4.

$$G_2 = \{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\}.$$

Zeige durch ein Widerspruchsargument, dass G_2 *nicht* isomorph zu $\mathbb{Z}_4$ ist: Nehme an, es gäbe einen Isomorphismus $f : G_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ und finde dann eine verletzte Invariate.

(iii) Wir betrachten die Gruppe S_3.

$$S_3 = \{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

Entscheide, ob S_3 isomorph zu $\mathbb{Z}_6$ ist.