Innermathematische Beziehungen
Zahlentheorie (Übung)

Prof. Dr. Markus Vogel
Fabian Grünig

Sommersemester 2018
Mittwoch, 14:00 Uhr, H009

Aufgabe 1 *(Grundbegriffe der Teilbarkeit)*

Vervollständige die folgenden Aussagen. (Es ist $5 \cdot 17 = 85$.)

(i) Die Zahl 17 ist ein ______________________ von 85. In Zeichen: _________________.

(ii) Die Zahl 11 ist ____________________________ von 85. In Zeichen: _________________.

(iii) Die Zahl 85 ist ein ______________________ von 5.

(iv) Die Teiler 5 und 17 sind als Teiler von 85 ______________________.

(v) Die Teilermenge $T(a)$ einer Zahl $a \in \mathbb{Z}$ besteht aus allen positiven Teilern von a. In Mengenschreibweise: $T(a) =$ ____________________________.

(vi) Eine Zahl a mit der Eigenschaft, dass $T(a)$ genau zwei Elemente besitzt, nennt man ______________________.

(vii) Eine Zahl a mit der Eigenschaft, dass $T(a)$ mehr als zwei Elemente besitzt, nennt man ______________________.

(viii) Für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ bezeichnet $T(a) \cap T(b)$ mengentheoretisch ______________________ der Teilermengen von a und b. In Mengenschreibweise: $T(a) \cap T(b) =$ ______________________.

(ix) Für zwei Zahlen a, b beinhaltet $T(a) \cap T(b)$ (anschaulich) die ____________________________ von a und b. Das größte Element dieser Menge heißt ____________________________ von a und b.

(x) Die trivialen Teiler einer Zahl $a \in \mathbb{Z}$ sind ______________________.

Aufgabe 2 *(Bestimmung von Teilern)*

(i) Bestimme alle (positiven) Teiler der folgenden ganzen Zahlen und gebe die Teilermengen an:

$$2, \quad 6, \quad 12, \quad 40, \quad 2010, \quad 2011.$$

(ii) Es seien $p, q \in \mathbb{Z}$ verschiedene Primzahlen sowie $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Bestimme alle (positiven) Teiler der folgenden ganzen Zahlen und gebe die Teilermengen an:

$$p, \quad q \cdot p, \quad p^2, \quad q \cdot p^2.$$

Aufgabe 3 *(Faktencheck: Teilbarkeiten)*
Es beschreiben alle genannten Variablen $a, b, \ldots$ ganze Zahlen. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

Aussage	wahr	falsch
Der Ausdruck $a \mid c$ bedeutet, dass es eine ganze Zahl $b \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $a \cdot b = c$.	□	□
Null ist Teiler von jeder ganzen Zahl.	□	□
Eins ist Teiler von jeder ganzen Zahl.	□	□
Jede ganze Zahl ist Teiler von Null.	□	□
Jede ganze Zahl ist Teiler von Eins.	□	□
Null ist Teiler von Null.	□	□
Die Zahl 1 ist weder Primzahl noch zerlegbar.	□	□
Gilt $a \mid b$ und $b \neq a$, dann ist a ein echter Teiler von b.	□	□
Gilt $a \mid b$, dann gilt auch $a \mid -b$.	□	□
Gilt $a \mid b$, dann gilt auch $-a \mid b$.	□	□
Teilbarkeit ist eine transitive Relation.	□	□
Teilbarkeit ist eine symmetrische Relation.	□	□

Aufgabe 4 *(Einfache zahlentheoretische Beweise)*
Eine häufige Übungsaufgabe zur Vorlesung *Zahlentheorie* ist der Beweis der Aussage

„Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade.“.

Eine mögliche Lösung ist die Folgende.

Beweis: Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ zwei ungerade Zahlen. Da a, b ungerade sind, existieren zwei Zahlen $s, t \in \mathbb{Z}$, sodass $x = 2 \cdot s + 1$ und $y = 2 \cdot t + 1$. Damit berechnen wir die Summe aus a und b wie folgt.

$$a + b = (2 \cdot s + 1) + (2 \cdot t + 1) = 2 \cdot s + 2 \cdot t + 2 = 2 \cdot (s + t + 1)$$

Demnach ist $(a + b)$ gerade. □

(i) Vollziehe den Beweis nach: Warum gibt es die Zahlen s, t? Was passiert in den jeweiligen Schritten der Rechnung? Was ist schlussendlich das Argument, dass $(a + b)$ gerade ist?

(ii) Zeige: „Die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ist ungerade.“

(iii) Sei $k \in \mathbb{N}$ eine *ungerade* natürliche Zahl mit $k > 1$. Zeige: „Die Summe von k aufeinanderfolgender Zahlen ist durch k teilbar“.

(iv) In der Vorlesung wurde folgende Frage zum *Anwärmen* diskutiert: „Die Zahl 3 ist die Differenz zweier aufeinander folgender Quadratzahlen $(4 - 1)$. Die Zahl 5 auch $(9 - 4)$. Die Zahl 7 auch $(16 - 9)$. Gilt das immer?“ Zur Argumentation stand folgende Rechnung an der Tafel:

$$x^2 - (x - 1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2x - 1.$$

Diskutiere: Welche der folgenden mathematischen Erkenntnisse sind damit gewonnen?

- Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Quadratzahlen ist immer ungerade.
- Jede ungerade Zahl ist als die Differenz zweier aufeinanderfolgender Quadratzahlen darstellbar.