Innermathematische Beziehungen
Zahlentheorie (Übung)

Prof. Dr. Markus Vogel
Fabian Grünig

Sommersemester 2018
Mittwoch, 14:00 Uhr, H009

Aufgabe 5 *(Beispiele: Teiler und Primzahlen)*

(i) Zahlen mit genau zwei Teilern sind Primzahlen. Finde Zahlen mit genau *drei* Teilern. Wie sieht die Primfaktorzerlegung dieser Zahlen aus?

(ii) Finde Zahlen mit genau *vier* Teilern. Wie sieht die Primfaktorzerlegung dieser Zahlen aus?

(iii) Finde Zahlen mit genau *fünf* oder *sieben* Teilern. Wie sieht die Primfaktorzerlegung dieser Zahlen aus?

(iv) Finde Zahlen mit genau *neun* Teilern. Wie sieht die Primfaktorzerlegung dieser Zahlen aus?

Aufgabe 6 *(Primzahlen: Das Zerlegbarkeits-Kriterium)*
Im Sinne der Vorlesung ist $p \in \mathbb{N}$ mit $p > 1$ eine Primzahl, falls $T(p) = \{1, p\}$ gilt. Zeige, dass für eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 1$ die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) k ist eine Primzahl, d. h. $T(k) = \{1, k\}$.

(ii) Sind $p, q \in \mathbb{N}$ zwei Zahlen mit $k = p \cdot q$, dann gilt $p = 1$ oder $q = 1$.

(iii) Sind $p, q \in \mathbb{N}$ zwei Zahlen mit $k = p \cdot q$, dann gilt $p = k$ oder $q = k$.

Aufgabe 7 *(Primzahlen: Das Primelement-Kriterium)*
Es sei $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $k > 1$. Wir bezeichnen k als *Primelement*, wenn die folgende Eigenschaft erfüllt ist:

> Für natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$, folgt im Falle $k \mid ab$ bereits $k \mid a$ oder $k \mid b$.

Zeige, dass es sich bei k um eine Primzahl im Sinne der Vorlesung handelt.
(Hinweis: Es gilt auch die Umkehrung, dass Primzahlen im Sinne der Vorlesung immer auch Primelemente sind. Dies wird zu einem späteren Zeitpunkt in der Vorlesung behandelt.)

Aufgabe 8 *(Beispiele für das Primelement-Kriterium)*

(i) Finde für die Zahl 4 ein Zahlenpaar $a, b \in \mathbb{Z}$, sodass sodass 4 ein Teiler von $a \cdot b$ ist, aber 4 weder a noch b teilt.

(ii) Finde für die Zahl 6 ein Zahlenpaar $a, b \in \mathbb{Z}$, sodass sodass 6 ein Teiler von $a \cdot b$ ist, aber 6 weder a noch b teilt.

(iii) Finde für die Zahl 45 ein Zahlenpaar $a, b \in \mathbb{Z}$, sodass sodass 45 ein Teiler von $a \cdot b$ ist, aber 45 weder a noch b teilt.

(iv) Erscheint dir das Finden solcher Zahlenpaare auch möglich, wenn man statt 4, 6 oder 45 Primzahlen vorgibt?