

Innermathematische Beziehungen

Zahlentheorie (Übung)

Prof. Dr. Markus Vogel
Fabian Grünig

Sommersemester 2018
Mittwoch, 14:00 Uhr, Ho09

AUFGABE 11 (Der binomische Lehrsatz)

Es seien $x, y \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Zeige mittels vollständiger Induktion, dass

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j y^{(n-j)}.$$

Hinweis: Es gilt $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$. Diese Identität darf ohne Beweis verwendet werden.

- (ii) Man findet in der Literatur auch folgende Formulierung des binomischen Lehrsatzes:

$$(x + y)^n = x^n + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} x^j y^{(n-j)} \right) + y^n.$$

Diskutiere, warum hierfür unterschiedliche Formulierungen zu finden sind.

AUFGABE 12 (Freshman's dream)

- (i) Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $0 < k < p$. Zeige, dass p ein Teiler des Binomialkoeffizienten $\binom{p}{k}$ ist.
- (ii) Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeige, dass $(a + b)^p$ genau dann durch p teilbar ist, wenn $a^p + b^p$ durch p teilbar ist.
- Tipp: Wiederhole die Teilbarkeitsregeln im Vorlesungsskript, Teil 01, Seite 05.*

AUFGABE 13 (Anwendungen des binomischen Lehrsatz)

- (i) Finde eine mathematische Erklärung für den folgenden Kopfrechentrick beim Quadrieren von Fünferzahlen: „Eine zweistellige Zahl mit Endziffer 5 wird quadriert, indem man die Zehnerziffer mit der um 1 erhöhten Ziffer multipliziert, zwei Nullen anhängt und 25 addiert.“
- (ii) Finde eine mathematische Erklärung für die folgende vereinfachte Form des schriftlichen Quadrierens:

47 * 47 =	76 * 76 =	31 * 31 =
-----	-----	-----
1649	4936	0901
56	84	06
-----	-----	-----
2209	5776	0961