Innermathematische Beziehungen
Zahlentheorie (Übung)

Prof. Dr. Markus Vogel
Fabian Grünig

Sommersemester 2018
Mittwoch, 14:00 Uhr, H009

Aufgabe 14 *(Satz über die ganzzahlige Division mit Rest)*
Wir bereiten in dieser Aufgabe den Satz über die *ganzzahlige Division mit Rest* nach; siehe im Vorlesungsskript Kapitel 2, Seite 11. Wir bezeichnen mit der Funktion

$$\begin{aligned} |\cdot|\colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ z &\longmapsto |z| := \begin{cases} z, & \text{falls } z \geq 0 \\ -z, & \text{falls } z < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

den gewöhnlichen Absolutbetrag.

Satz (Ganzzahlige Division mit Rest) *Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ zwei ganze Zahlen, wobei $b \neq 0$. Dann gibt es genau ein Zahlenpaar $r, q \in \mathbb{Z}$ mit den Eigenschaften*

$$a = q \cdot b + r \quad \textit{und} \quad 0 \leq r < |b|$$

Beweis: Da $b \neq 0$ ist $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl. Rationale Zahlen liegen immer zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen. Demnach gibt es eine ganze Zahl $q \in \mathbb{Z}$ mit $q \leq \frac{a}{b} < q + 1$ [i]. Wir nehmen zunächst an, dass $b > 0$. Durch Multiplikation der Ungleichung mit b ergibt sich $qb \leq a < qb + b$. Daraus erhalten wir $0 \leq a - qb < b$. Setzen wir $r := a - qb$, dann gilt [ii]

$$a = q \cdot b + r \quad \text{und} \quad 0 \leq r < |b|.$$

Für $b < 0$ verläuft die Argumentation analog [iii]. Dies zeigt die Existenz des Zahlenpaars q, r [iv].

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit. Seien $q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$ und $q_2, r_2 \in \mathbb{Z}$ zwei Zahlenpaare mit $q_1, q_2 \neq 0$ und

$$\begin{aligned} a = q_1 \cdot b + r_1 &\quad \text{und} \quad 0 \leq r_1 < |b| \\ a = q_2 \cdot b + r_2 &\quad \text{und} \quad 0 \leq r_2 < |b|. \end{aligned}$$

Wieder betrachten wir zunächst nur den Fall $b > 0$. Aus den obigen Gleichungen ergibt sich $r_2 - r_1 = b(q_1 - q_2)$. Außerdem lässt folgern, dass die Differenz $(r_2 - r_1)$ zwischen $-b$ und b liegt [v]. Durch Einsetzen erhalten wir

$$-b < b(q_1 - q_2) < b$$

und daraus

$$-1 < (q_1 - q_2) < 1.$$

Da aber $(q_1 - q_2) \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl ist, gilt $q_1 - q_2 = 0$ und damit $r_2 - r_1 = 0$. Insgesamt zeigt dies die Eindeutigkeit des Zahlenpaars q, r [vi]. Die Argumentation für $b < 0$ erfolgt analog [vii]. □

(i) Bestimme für die folgenden Zahlen a, b jeweils $\frac{a}{b}$, q und $q+1$ gemäß der Konstruktion im obigen Beweis.

a	b	q	$\frac{a}{b}$	$q+1$
5	2			
-5	2			
5	-2			
-5	-2			
45	15			
15	45			
0	7			
7	1			

(ii) Führe Argument ausführlich aus. Warum gilt $a = qb + r$ und $0 \leq r < |b|$.

(iii) Führe die Argumentation für den Fall $b < 0$ explizit aus.

(iv) Berechne für die Zahlen aus (i) auch $r = a - qb$.

(v) Führe die Argumentation explizit aus; zeige also, dass $-b < r - r' < b$.

(vi) In der Argumentationskette wurden einige Teilschritte übersprungen. Versuche den Teil des Beweises zu verständlich und kleinschrittig wie möglich zu formulieren.

(vii) Die Argumentation für den Fall $b < 0$ zu verallgemeinern ist ein klein wenig kniffliger. Versuche eine saubere Argumentation für diesen Fall zu finden.
Hinweis 2: Du kannst versuchen die Argumentation des obigen Beweises nachzubilden. Alternativ kannst du auch direkt $q = q_2 - q_1$ und $r = r_1 - r_2$ betrachten und zeigen, dass $r < |b|$ und $r = bq$ gelten.

AUFGABE 15 *(Schriftliche Division mit Rest als ganzzahlige Division)*
Führe die schriftliche Division mit Rest für die folgenden Zahlbeispiele $a, b \in \mathbb{Z}$ durch – finde also Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$

$$a = q \cdot b + r \quad \text{und} \quad 0 \leq r < |b|.$$

(i) $a = 24$ und $b = 18$,

(ii) $a = -850$ und $b = 510$,

(iii) $a = 17$ und $b = -4$.

ZUSATZAUFGABE 1 *(Schriftliche Dividision mit Rest als Polynomdivision)*
Führe die schriftliche Division mit Rest für die folgenden (normierten) Polynome $f(X), g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ durch – finde also (normierte) Polynome $q(X), r(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit

$$f(X) = q(X) \cdot g(X) + r(X) \quad \text{und} \quad 0 \leq \operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(g).$$

(i) $f(X) = X^2 - 1$ und $g(X) = X + 1$

(ii) $f(X) = X^3 - X^2 + 1$ und $g(X) = X^2 + 2$

(iii) $f(X) = X^3 - 3X^2 - X + 3$ und $g(X) = X - 3$. Ist 3 eine Nullstelle von f?

Hinweis: Das Verfahren der Division mit Rest von ganzen Zahlen und Polynomen verläuft analog. Für die Eindeutigkeitsbedingung an den Rest wird für ganze Zahlen der Absolutbetrag verwendet, für Polynome der Grad.