Innermathematische Beziehungen
Zahlentheorie (Übung)

Prof. Dr. Markus Vogel
Fabian Grünig

Sommersemester 2018
Mittwoch, 14:00 Uhr, H009

Aufgabe 16 *(ggT via Teilermengen)*
In der Vorlesung (vgl. Vorlesungskript, Kapitel 02, Seite 13) wurde der ggT zweier ganzer Zahlen über deren *Teilermengen* definiert. Bestimme für die folgenden Zahlenpaare $a, b \in \mathbb{Z}$ jeweils die Teilermengen dieser Zahlen und deren ggT.

(i) $a = 24$ und $b = -36$.

(ii) $a = 850$ und $b = 510$.

(iii) $a = 510$ und $b = 850$.

(iv) $a = 15$ und $b = 0$.

(v) $a = 15$ und $b = 1$.

Aufgabe 17 *(ggT via Euklidischem Algorithmus)*
Als Berechnungsverfahren für der ggT wurde in der Vorlesung der *Euklidische Algorithmus* entwickelt (vgl. Vorlesungsskript, Kapitel 02, Seite 13f). Bestimme mit diesem Algorithmus den ggT der folgenden Zahlenpaar $a, b \in \mathbb{Z}$.

(i) $a = 24$ und $b = -36$.

(ii) $a = 850$ und $b = 510$.

(iii) $a = 337.500$ und 11.250.

(iv) $a = 20.588.575$ und $b = 191.406.250$.

Aufgabe 18 *(ggT via Primfaktorzerlegung)*
Der ggT zweier ganzer Zahlen lässt sich auch über die *Primfaktorzerlegung* (PFZ) konstruieren. Wir bezeichnen mit $\mathbb{P}$ die Menge aller (positiven) Primzahen, $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$. Für eine ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ und eine Primzahl $p \in \mathbb{P}$ bezeichnen wir mit $n_p(a) \in \mathbb{N}_0$ den Exponenten von p in der PFZ von a. Die PFZ einer Zahl a lässt sich damit wie folgt formulieren

$$a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{n_p(a)}.$$

(Ist etwa $a = 1.166.886 = 2^1 \cdot 3^5 \cdot 7^4$, dann ist $n_2(a) = 1, n_3(a) = 5, n_5(a) = 0, n_7(a) = 4, n_{11}(a) = 0, \ldots$.) Damit ergibt sich für den ggT zweier ganzer Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{ggT}(a, b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min\left(n_p(a), n_p(b)\right)},$$

wobei $\min\left(n_p(a), n_p(b)\right)$ die kleinere der beiden Zahlen $n_p(a)$ und $n_p(b)$ bezeichne.

Bestimme für die folgenden Zahlenpaare $a, b \in \mathbb{Z}$ den ggT mit dieser Methode.

(i) $a = 5^2 \cdot 7^7$ und $b = 2 \cdot 5^9 \cdot 7^2$.

(ii) $a = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^5$ und $b = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^4$.

(iii) $a = 8 \cdot 15^2 \cdot 19$ und $b = 4 \cdot 12 \cdot 80$.

Zusatzaufgabe 2 *(PFZ und Teilbarkeit, Theorie)*
Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeige die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen.

(i) a ist Teiler von b.

(ii) Für alle $p \in \mathbb{P}$ gilt: $n_p(a) \leq n_p(b)$.

Zusatzaufgabe 3 *(PFZ und Teilbarkeit, Praxis)*
Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(i) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 17$ teilt $2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^6 \cdot 17^2$.

(ii) $13^2 \cdot 17^2 \cdot 19$ teilt $13^2 \cdot 17^2 \cdot 29$.

(iii) $5^2 \cdot 7^3$ ist die größte Zahl, die sowohl $5^2 \cdot 7^7$ als auch $2 \cdot 5^9 \cdot 7^2$ teilt.

(iv) $7^3 \cdot 11^6 \cdot 17$ ist die kleinste Zahl, die sowohl von $7^3 \cdot 17$ als auch von $7 \cdot 11^6$ geteilt wird.

Zusatzaufgabe 4 *(Eindeutigkeit der PFZ)*
Bestimme, ob die folgenden Zahlen gleich oder verschieden sind.

(i) $3^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 13$ und $5 \cdot 11 \cdot 7^2 \cdot 13$.

(ii) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 17^7$ und $6^2 \cdot 17^7 \cdot 2$.

(iii) $6^2 \cdot 8^2 \cdot 12^2$ und $6^4 \cdot 8^3 \cdot 4$.