Innermathematische Beziehungen
Zahlentheorie (Übung)

Prof. Dr. Markus Vogel | Sommersemester 2018
Fabian Grünig | Mittwoch, 14:00 Uhr, H009

Wir betrachten auf diesem Übungszettel die Lösungstheorie von reellen, linearen Gleichungssystemen (LGS) und die Lösungstheorie von linearen, diophantischen Gleichungen (LDG).

(LGS) Wir betrachten allgemein lineare Gleichungssysteme mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = b_2$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = b_3$$

Fassen wir die Koeffezienten in Matrixschreibweise als $A = (a_{ij})$ zusammen und beschreiben die Unbekannten als Spaltenvektor $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ sowie die Gleichungsbedingungen als Spaltenvektor $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ so ergibt sich die folgende Schreibweise für das obige Gleichungsystem

$$A \cdot \vec{X} = \vec{b},$$

(LDG) Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$, dann betrachten wir die lineare diophantische Gleichung

$$aX + bY = c.$$

Zusatzaufgabe 6 *(Lösungstheorie homogener linearer Gleichungssysteme)*
Lineare Gleichungssysteme der Form $A \cdot \vec{X} = 0$ (also diejenigen LGS mit $\vec{b} = 0$) heißen *homogene* LGS. Die Lösungen von homogenen Gleichungssystemen besitzen eine besondere „Abschlusseigenschaft“:

(i) Zeige, dass der Nullvektor $\vec{0}$ immer eine Lösung eines homogenen LGS ist.

(ii) Seien $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zwei Lösungen des homogenen LGS. Zeige, dass auch $\vec{x} + \vec{y}$ eine Lösung des homogenen LGS ist.

(iii) Seien $\vec{x}$ eine Lösungen des homogenen LGS und $\lambda \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Zeige, dass auch $\lambda \cdot \vec{x}$ eine Lösung des homogenen LGS ist.

Hinweis: Die Aufgabe kann sowohl mit Hilfe des Gleichungssystems als in Matrixschreibweise bearbeitet werden.

Zusatzaufgabe 7 *(Lösungstheorie homogener linearer diophantischer Gleichungen)*
Lineare diophantische Gleichungen der Form $aX + bY = 0$ (also diejenigen LDG mit $c = 0$) heißen *homogene* LDG. Es sei $d = \mathrm{ggT}(a, b)$.

(i) Zeige: Die Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ der homogenen LDG stimmen mit den Lösungen der Gleichung $\frac{a}{d} \cdot X = (-\frac{b}{d}) \cdot Y$ überein.

(ii) Es sind $\frac{a}{d}$ und $\frac{b}{d}$ teilerfremde ganze Zahlen (Warum?). Zeige hiermit, dass $\frac{a}{d} \mid y$ und $\frac{b}{d} \mid x$.

(iii) Aussage (ii) besagt, dass es die jeweiligen Gegenteiler $s, t \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $x = s \cdot \frac{b}{d}$ und $y = t \cdot \frac{a}{d}$. Zeige mit Hilfe von (i), dass $t = -s$ gilt.

(iv) Zeige: Für beliebiges $t \in \mathbb{Z}$ ist $\left(t \cdot \frac{b}{d}, (-t) \cdot \frac{a}{d}\right)$ eine Lösung der homogenen LDG.

Zusatzaufgabe 8 *(Spezielle und homogene Lösungen von LGS)*
Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{X} = \vec{b}$. Es sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ eine Lösung dieses LGS.

(i) Es sei $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ eine Lösung des zugehörigen *homogenen* LGS der Form $A \cdot \vec{X} = \vec{0}$. Zeige, dass die Summe $\vec{x} + \vec{y}$ eine Lösung des (nicht-homogenen) LGS ergibt.
Hinweis: Wir erhalten die Regel „Spezielle Lösung plus homogene Lösung ergibt weitere spezielle Lösung."

(ii) Es sei $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ eine weitere Lösung des obigen LGS. Zeige, dass die Differenz $\vec{x} - \vec{z}$ eine Lösung des zugehörigen *homogenen* LGS ergibt.
Hinweis: Wir erhalten die Regel „Differenz zweier spezieller Lösungen ergibt eine homogene Lösung."

(iii) Zeige, dass sich eine beliebige Lösung des obigen LGS immer als eine Summe von $\vec{x}$ und einer Lösung des zugehörigen *homogenen* LGS darstellen lässt.

Zusatzaufgabe 9 *(Spezielle und homogene Lösungen von LDG)*
Wir betrachten die lineare Diophantische Gleichung $aX + bY = c$. Es sei $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine Lösung dieser LDG.

(i) Es sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine Lösung der zugehörigen *homogenen* LDG der Form $aX + bY = 0$. Zeige, dass die Summe $(x + x_0, y + y_0)$ eine Lösung der (nicht-homogenen) LDG ergibt.
Hinweis: Wir erhalten die Regel „Spezielle Lösung plus homogene Lösung ergibt weitere spezielle Lösung."

(ii) Es sei $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine weitere Lösung der obigen LDG. Zeige, dass die Differenz $(x - \tilde{x}, y - \tilde{y})$ eine Lösung der zugehörigen *homogenen* LDG ergibt.
Hinweis: Wir erhalten die Regel „Differenz zweier spezieller Lösungen ergibt eine homogene Lösung."

(iii) Zeige, dass sich eine beliebige Lösung der obigen LDG immer als eine Summe von (x, y) und einer Lösung der zugehörigen *homogenen* LDG darstellen lässt.

Zusatzaufgabe 10 *(Allgemeine Lösungstheorie von LGS)*
Gegeben sei ein LGS der Form $A \cdot \vec{X} = \vec{b}$.

(i) Beschreibe ein Verfahren zur Bestimmung *einer speziellen* Lösung.

(ii) Beschreibe ein Verfahren zur Bestimmung der Lösungen des zugehörigen homogenen LGS.

(iii) Beschreibe ein Verfahren zur Bestimmung aller Lösungen des LGS.

Zusatzaufgabe 11 *(Allgemeine Lösungstheorie von LDG)*
Gegeben sei ein LGS der Form $aX + bY = c$.

(i) Beschreibe ein Verfahren zur Bestimmung *einer speziellen* Lösung.

(ii) Beschreibe ein Verfahren zur Bestimmung Lösungen der zugehörigen homogenen LDG.

(iii) Beschreibe ein Verfahren zur Bestimmung aller Lösungen der LDG.