Innermathematische Beziehungen
Zahlentheorie (Übung)

Prof. Dr. Markus Vogel
Fabian Grünig

Sommersemester 2018
Mittwoch, 14:00 Uhr, H009

Aufgabe 21 *(Erweiterter Euklidischer Algorithmus)*

(i) Bestimme $d = \text{ggT}(28, 42)$ und führe anschließend den erweiterten euklidischen Algorithmus durch – stelle also d als Linearkombination von 28 und 42 dar.

(ii) Bestimme $\text{ggT}(57, 45)$ und führe anschließend den erweiterten euklidischen Algorithmus durch.

Aufgabe 22 *(Das Lemma von Bezout)*
Der Eweiterte Euklidische Algorithmus (EEA) sichert, dass sich der ggT zweier ganzer Zahlen immer als (ganzzahlige) Linearkombination darstellen lässt. Wir betrachten für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ die Menge

$$L^+(a, b) = \{x \cdot a + y \cdot b \mid x, y \in \mathbb{Z};\ x \cdot a + y \cdot b > 0\}$$

der *positiven* Linearkombinationen von a und b. Der EEA liefert die Aussage $\text{ggT}(a, b) \in L^+(a, b)$. Wir werden in dieser Aufgabe nachweisen, dass $\text{ggT}(a, b)$ die besondere Rolle des kleinsten Elements

$$\text{ggT}(a, b) = \min\left(L^+(a, b)\right)$$

innerhalb dieser Menge der Linearkombinationen einnimmt.

(i) Finde durch Ausprobiern möglichst kleine, positive Linearkombinationen des Zahlenpaars $a = 30$ und $b = 42$.

(ii) Finde durch Ausprobiern möglichst kleine, positive Linearkombinationen des Zahlenpaars $a = 440$ und $b = 198$.

(iii) Es sei $d = \min\left(L^+(a, b)\right)$. Wir weisen nun nach, dass d die charakterisierenden Eigenschaften des ggT erfüllt.

  (a) Zeige, dass d ein Teiler von a ist.
  Tipp: Betrachte den Rest bei der Division von a durch d. Kannst Du ihn als Linearkombination von a und b darstellen? Anschließend hilft ein Minimalitätsargument.

  (b) Zeige, dass d ein Teiler von b ist.

  (c) Es sei t ein gemeinsamer Teiler von a und b. Zeige, dass t dann auch Teiler von d ist.

Aufgabe 23 *(Wahr oder Falsch? – ggT und kgV)*
Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Finde für falsche Aussagen konkrete Gegenbeispiele.
Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

- $\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Ist $\text{ggT}(a,b) = a$, dann ist a eine Primzahl.
- $\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Ist $\text{kgV}(a,b) = a \cdot b$, dann sind a und b Primzahlen.
- $\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Gilt $M(a) \subseteq M(b)$, dann gilt $a \mid b$.
- $\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Gilt $T(a) \subseteq T(b)$, dann gilt $a \mid b$.

- $\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Es gilt $\text{ggT}(a,-a) = 1$.
- $\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Es gilt $\text{kgV}(a,-a) \cdot \text{ggT}(a,-a) = -a^2$.
- $\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Es gilt $\text{kgV}(a \cdot b, a \cdot c) = a^2 \cdot \text{kgV}(b,c)$.

- $\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Gilt $\text{ggT}(b,c) = 1$ und $a \mid bc$, dann gilt $a \mid b$ oder $a \mid c$.
- $\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Gilt $a \mid c$ und $b \mid c$ und $\text{ggT}(a,b) = 1$, dann gilt auch $(a \cdot b) \mid c$.
- $\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Gilt $a \mid (b + c)$ und $a \mid c$, dann gilt auch $a \mid b$.
- $\boxed{\text{W}}\ \boxed{\text{F}}$ Gilt $16 \mid a^4$, dann gilt auch $2 \mid a$.