

Innermathematische Beziehungen

Zahlentheorie (Übung)

Prof. Dr. Markus Vogel
Fabian Grünig

Sommersemester 2018
Mittwoch, 14:00 Uhr, Ho09

AUFGABE 27 (Lösungsverhalten linearer Diophantischer Gleichungen)

Wir betrachten die lineare Diophantische Gleichung

$$168 \cdot X + 238 \cdot Y = -42.$$

- (i) Verifiziere, dass es sich bei $P_1 = (4, -3)$ und $P_2 = (-47, 33)$ um Lösungen obiger Gleichung handelt.
- (ii) Verifiziere, dass $P_1 - P_2$ eine Lösung der zugehörigen *homogenen* Gleichung ist (vgl. Aufgabe 25). Gilt das auch für $P_2 - P_1$? Auch für $(4 \cdot P_2 - 4 \cdot P_1)$? Auch für $(5 \cdot P_2 - 2 \cdot P_1)$?
- (iii) Wähle zwei beliebige Lösungen Q_1, Q_2 der zugehörigen homogenen Gleichung. Was kannst du über $(P_1 + Q_1), (P_2 + Q_2), (P_1 + Q_2)$ und $(P_2 + Q_1)$ aussagen?
- (iv) Bilde weitere Kombinationen der P_i und Q_i . Kannst Du eine Vermutung aufstellen?

AUFGABE 28 (Spezielle und homogene Lösungen von LDG)

Wir betrachten die lineare Diophantische Gleichung $aX + bY = c$. Es sei $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine Lösung dieser LDG.

- (i) Es sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine Lösung der zugehörigen *homogenen* linearen Diophantischen Gleichung der Form $aX + bY = 0$. Zeige, dass die Summe $(x + x_0, y + y_0)$ eine Lösung der (nicht-homogenen) linearen Diophantischen Gleichung ergibt.
Hinweis: Wir erhalten die Regel „Spezielle Lösung plus homogene Lösung ergibt weitere spezielle Lösung.“
- (ii) Es sei $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine weitere Lösung der obigen Gleichung. Zeige, dass die Differenz $(x - \tilde{x}, y - \tilde{y})$ eine Lösung der zugehörigen *homogenen* Gleichung ergibt.
Hinweis: Wir erhalten die Regel „Differenz zweier spezieller Lösungen ergibt eine homogene Lösung.“
- (iii) Zeige, dass sich eine beliebige Lösung der obigen LDG immer als eine Summe von (x, y) und einer Lösung der zugehörigen *homogenen* LDG darstellen lässt.

Hinweis: Durch finden einer konkreten Lösung mit Hilfe des erweiterten Euklidischen Algorithmus und der Formel für die Lösungsmenge der zugehörigen homogenen Gleichung aus Aufgabe 26 erhalten wir eine ausführliche Begründung für die allgemeine Lösungsformel aus dem Vorlesungsskript (Abschnitt 3, Seite 22).

AUFGABE 29 (Lösungsmengen linearer Diophantischer Gleichungen)

Bestimme im Falle der Lösbarkeit die allgemeine Lösungsmenge zu den linearen Diophantischen Gleichungen aus Aufgabe 24.