# **Innermathematische Beziehungen**

## Zahlentheorie (Übung)

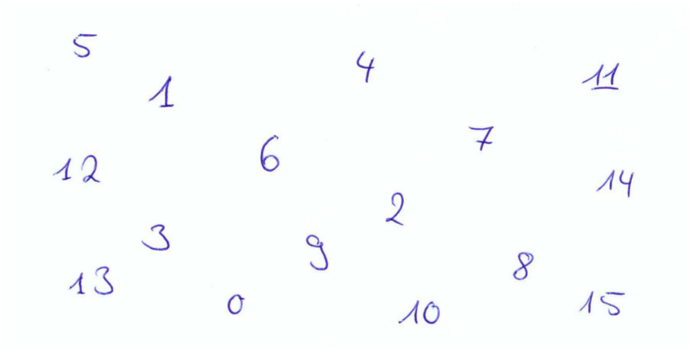
Prof. Dr. Markus Vogel
Fabian Grünig

Sommersemester 2018
Mittwoch, 14:00 Uhr, H009

---

**Aufgabe 27** *(Klassenbildung via Division mit Rest)*
Es sei $m \in \mathbb{Z}$. Wir nennen zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ *kongruent bezüglich* $m$, falls $x$ und $y$ bei der Division durch $m$ den gleichen Rest lassen.

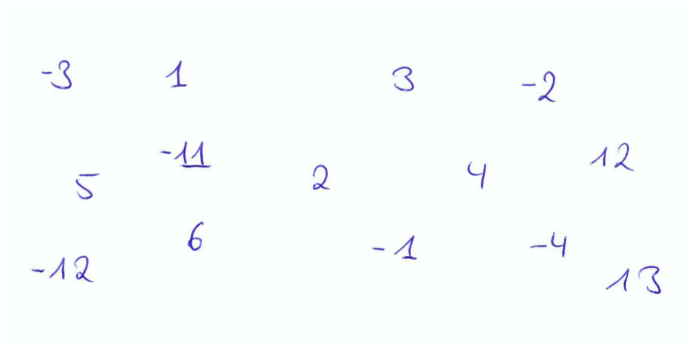
(i) Wir betrachten den Fall $m = 5$. Markiere jeweils die Zahlen in der folgenden Zahlenwolke, die zueinander kongruent bezüglich 5 sind.




(ii) Wir haben die Zahlen nun in Klassen eingeteilt. Wähle jeweils Zahlenpaare *innerhalb* einer Klasse und bilde deren Differenz. Was fällt Dir auf? Formuliere eine Vermutung.

(iii) Wähle nun jeweils Zahlenpaare aus *verschiedenen* Klassen und bilde deren Differenz. Was fällt Dir auf? Formuliere eine Vermutung.

(iv) Wir betrachten nun den Fall $m = 3$. Markiere jeweils die Zahlen in der folgenden Zahlenwolke, die zueinander kongruent bezüglich 3 sind.




(v) Auch hier haben wir die Zahlen in Klassen eingeteilt. Verifiziere Deine Vermutungen aus (ii) und (iii) anhand dieser Klassen.

**Aufgabe 28** *(Charakterisierung von Kongruenzen)*
Es seien $x, y, m \in \mathbb{Z}$. Zeige: Lassen $x$ und $y$ den selben Rest beim Teilen durch $m$, dann ist die Differenz $x - y$ durch $m$ teilbar.

**Aufgabe 29** *(Addition und Klassenbildung)*
Wir betrachten Restklassen bezüglich $m = 5$ und die Zahlenmenge $M = \{-13, -8, -3, 2, 7, 12\}$.

(i) Verifiziere, dass die Zahlen aus $M$ alle in der selben Restklasse bezüglich 5 liegen.

(ii) Suche Dir eine beliebige ganze Zahl $x$ aus. Addiere zu dieser Zahl jeweils die Zahlen aus $M$, sodass du wieder eine Menge von 6 Zahlen erhälst.

(iii) Was fällt Dir bezüglich dieser Menge auf?

(iv) Deine Kommiliton*innen werden in (ii) vermutlich eine andere Zahl gewählt haben. Vergleicht und diskutiert Eure Ergebnisse. Könnt Ihr eine Vermutung aufstellen?

**Aufgabe 30** *(Vertreterunabhängige Rechnungen bei der Klassenbildung)*
Es sei $m \in \mathbb{Z}$. Ferner seien $a, x, y \in \mathbb{Z}$ so gewäht, dass $x$ und $y$ kongruent bezüglich $m$ sind.

(i) Zeige: $(a + x)$ und $(a + y)$ sind kongruent bezüglich $m$.

(ii) Zeige: $(a - x)$ und $(a - y)$ sind kongruent bezüglich $m$.

(iii) Zeige: $(a \cdot x)$ und $(a \cdot y)$ sind kongruent bezüglich $m$.

**ZUSATZAUFGABE 7** *(Schrittweite in der allgemeinen Lösungsformel)*
Ist $(x,y)$ konkrete Lösung einer linearen Diophantischen Gleichung $a \cdot X + b \cdot Y = c$, dann sind alle Lösungen gegeben durch

$$x + t \cdot \left(\frac{b}{\mathrm{ggT}(a,b)}\right), \quad y - t \cdot \left(\frac{a}{\mathrm{ggT}(a,b)}\right) \qquad \text{für } t \in \mathbb{Z}$$

Was passiert, wenn wir nicht durch den $\mathrm{ggT}(a,b)$ teilen und stattdessen

$$x + t \cdot b, \quad y - t \cdot a \qquad \text{für } t \in \mathbb{Z}$$

betrachten? Welche Rolle spielt der $\mathrm{ggT}(a,b)$ in der allgemeinen Lösungsformel für lineare Diophantische Gleichung?