

Innermathematische Beziehungen

Zahlentheorie (Übung)

Prof. Dr. Markus Vogel
Fabian Grünig

Sommersemester 2018
Mittwoch, 14:00 Uhr, Hoog

AUFGABE 33 (Nullteiler und die Kürzungsregel)

Bestimme alle Lösungen der Gleichung $\overline{10} \cdot \overline{X} = \overline{10}$ in \mathbb{Z}_{15} . Wir „kürzen“ aus dieser Gleichung $\overline{5}$ heraus und erhalten die Gleichung $\overline{2} \cdot \overline{X} = \overline{2}$. Bestimme alle Lösungen dieser Gleichung. Was fällt dir auf? Welche Rolle hat $\overline{5}$ in \mathbb{Z}_{15} ?

AUFGABE 34 (Einheiten und die Kürzungsregel)

Wir betrachten in \mathbb{Z}_m eine Gleichung der Form $(\overline{b} \cdot \overline{a}) \cdot \overline{X} = \overline{b} \cdot \overline{c}$.

Zeige: Sind b und m teilerfremd, dann hat obige Gleichung die selben Lösungen wie $\overline{a} \cdot \overline{X} = \overline{c}$.

AUFGABE 35 (Vertreterunabhängigkeit des Einheitenkriteriums)

In der Vorlesung (vgl. Vorlesungsskript, Kapitel 05, Seite 31) wurde folgendes Kriterium für Einheiten in \mathbb{Z}_m entwickelt:

$$\overline{a} \text{ ist Einheit in } \mathbb{Z}_m \quad \text{gdw.} \quad \text{ggT}(a, m) = 1.$$

Zeige, dass dieses Kriterium nicht von der Wahl von a als Vertreter der Restklasse \overline{a} abhängt.

AUFGABE 36 (Vertreterunabhängigkeit bei linearen Diophantischen Gleichungen)

Bestimme, ob die lineare Diophantische Gleichung $96 \cdot x + 21 \cdot y = 15$ lösbar ist. Löse dann die folgenden Aufgaben mit möglichst wenig Rechenaufwand.

(i) Sind die folgenden linearen Diophantischen Gleichungen lösbar?

$$\begin{array}{ll} 117 \cdot x + 21 \cdot y = 15; & 54 \cdot x + 21 \cdot y = 15; \\ (-30) \cdot x + 21 \cdot y = 15; & (-72) \cdot x + 21 \cdot y = 15 \end{array}$$

(ii) Sind die folgenden linearen Diophantischen Gleichungen lösbar?

$$\begin{array}{ll} 75 \cdot x + 21 \cdot y = 14; & 128 \cdot x + 21 \cdot y = 14; \\ (-93) \cdot x + 21 \cdot y = 16; & 12 \cdot x + 21 \cdot y = 16 \end{array}$$

(iii) Sind die folgenden linearen Diophantischen Gleichungen lösbar?

$$96 \cdot x + (-75) \cdot y = 15; \quad 96 \cdot x + 117 \cdot y = 15;$$

(iv) Sind die folgenden linearen Diophantischen Gleichungen lösbar?

$$96 \cdot x + 213 \cdot y = 16; \quad 96 \cdot x + (-171) \cdot y = 16$$